ΑΡΙΣΤΑΡΧΟΣ Ο ΣΑΜΙΟΣ: «…τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν…» ΚΑΙ ΟΧΙ ΜΟΝΟΝ

Ιωάννης Αραχωβίτης
Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών
Πανεπιστημιόπολη 15784
e-mail : iarahov@math.uoa.gr

Περίληψη

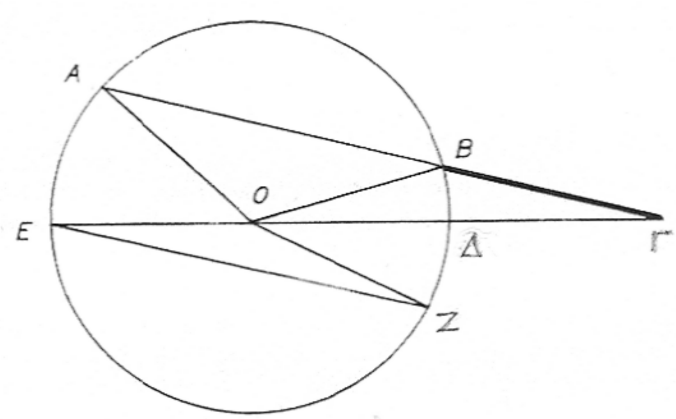
Ο Αρίσταρχος ο Σάμιος είναι γνωστός ως ο θεμελιωτής του ηλιοκεντρικού συστήματος , όπως προκύπτει απο όσα ο Αρχιμήδης γράφει στο έργο του «Ψαμμίτης» και τα οποία οδήγησαν στη διαμόρφωση του τίτλου του Heath : *Aristarchus of Samos the ancient Copernicus* , αλλά και του τίτλου της παρούσας , εν μέρει . Το υπόλοιπο μέρος του τίτλου υπαινίσσεται οτι ο Αρίσταρχος δεν ήταν μόνον αστρονόμος .Πράγματι ήταν και ένας αναγνωρισμένος μαθηματικός . Ο Sextus Empiricus (1ο ήμισυ 3ου αιώνα μ.Χ.) αναφέρεται στον Αρίσταρχο λέγοντας : « Αυτοί που δεν παραδέχονται την κίνηση του κόσμου και πιστεύουν οτι η Γή κινείται , όπως οι οπαδοί του Αρίσταρχου του μαθηματικού…». Τα μαθηματικά εφαρμόζει ο Αρίσταρχος στις αστρονομικές του μελέτες όπως προκύπτει σαφώς απο μιαν αναφορά του Πάππου στο μοναδικό έργο του Αρίσταρχου «*Περὶ μεγεθῶν καὶ αποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης*» . Αναφέρεται συγκεκριμένα ο Πάππος σ'ένα λήμμα που χρησιμοποιείται εκεί , μια μορφή του οποίου εμφανίζεται σε μια Αρχιμήδεια λύση για την τριχοτόμηση γωνίας βασισμένη στη μέθοδο της νεύσεως . Εκεί ο Αρίσταρχος απλουστεύει τη λύση του Αρχιμήδη , πράγμα που θ'αποτελέσει αφετηρία του σχολιασμού που ακολουθεί .

Αρίσταρχος ⇄ Αρχιμήδης

Η λύση του Αρχιμήδη

Ο Αρχιμήδης πράγματι , στη σύνθεση κατά τη λύση αυτή , χρησιμοποιεί το εξής λήμμα (8η Πρόταση του «*Βιβλίου των Λημμάτων*»):

Έστω ότι δίδεται το τόξο ΑΕ κύκλου κέντρου Ο . Η χορδή ΑΒ άγεται και προεκτείνεται για να τμήσει τη διάμετρο ΕΟΔ στο Γ, έτσι ώστε ΟΒ=ΒΓ.



Τότε το τόξο ΒΔ είναι το 1/3 του ΑΕ : Φέρω τη χορδή ΕΖ // ΑΒ και τις ΟΑ ΟΒ, ΟΖ. Οι γωνίες ∠ Ε και ∠ Ζ είναι ίσες και συνεπώς ∠ ΔΟΖ = ∠ 2Ε . Λόγω παραλληλίας ∠ Ε = ∠ Γ καί άρα ∠ ΔΟΖ = ∠ 2Γ . Επειδή ΓΒ = ΒΟ η γωνία ∠ ΒΟΔ = ∠ Γ και άρα ∠ ΔΟΖ = ∠ 2ΔΟΒ , ή τόξο ΔΖ = 2τόξοΒΔ . Λόγω παραλληλίας , τόξο ΑΕ = τόξοΒΖ . Ετσι τόξοΑΕ = 3τόξοΒΔ .

Μια πιθανή λύση του Αρίσταρχου

Εύκολα παρατηρεί κανείς οτι η χορδή ΕΖ // ΑΒ είναι περιττή , διότι αφού ΓΒ = ΒΟ, έπεται οτι ∠ Γ = ∠ ΒΟΓ . Επειδή ∠ ΑΒΟ = ∠ Γ + ∠ ΒΟΓ, προφανώς ∠ ΑΒΟ = ∠ 2Γ . Εξ άλλου ΟΒ = ΟΑ , οπότε ∠ ΟΒΑ = ∠ ΒΑΟ Επειδή ∠ ΟΑΒ + ∠ Γ = ∠ ΕΟΑ , θα είναι ∠ ΕΟΑ = ∠ Γ = ∠ 3ΒΟΔ . Ετσι , τόξοΑΕ = 3τόξοΒΔ .

Στον Αρίσταρχο , κατά τον Πάππο [1] , εμφανίζεται το ίδιο σχήμα , με τη διαφορά οτι το ευθύγραμμο τμήμα ΓΒ δεν έχει συγκεκριμένο μήκος . Ο μόνος ισχυριρισμός που υπάρχει είναι : τόξοΑΕ > τόξοΒΔ[2]. Αρα , η παραπάνω βελτίωση στην απόδειξη του Αρχιμήδη , θα μπορούσε να έχει διατυπωθεί κάλλιστα απο τον Αρίσταρχο αφού σαφώς προκύπτει οτι εγνώριζε πως η χορδή ΕΖ δεν είναι αναγκαίο να αχθεί, διορθώνοντας έτσι προκαταβολικά (;) τον Αρχιμήδη,μιά και ο τελευταίος ήταν μεταγενέστερος (Αρίσταρχος : c. 310 – 230 π.Χ. Αρχιμήδης : 287 – 212 π.Χ.) .Πάντως είναι περίεργο πώς ο Αρχιμήδης που μελετούσε τον Αρίσταρχο (: ίσως και το περίφημο « Δός μοι π στ κα τ ν γ ν κινήσω » να ήταν ….ηλιοκεντρικής εμπνεύσεως) , δεν είχε επισημάνει τίποτε

[1] *Συναγωγή ,* βιβλίο VI , II, σ. 560 – 562 .

[2] Knorr ,W. R.*The Ancient Tradition of Geometric Problems.*Dover ,1993,p.205,note106[a].

σχετικό με τα παραπάνω στα γραπτά του,καθώς μάλιστα αυτό αφορούσε σ’ένα απο τα περίφημα «άλυτα» προβλήματα της αρχαιότητας που τον ενδιέφεραν .

Αρίσταρχος ⇄ Απολλώνιος

Ενώ ο Αρίσταρχος ο Σάμιος έχει καθιερωθεί ως αστρονόμος και πρόδρομος του Κοπέρνικου, παρ’ ότι οι σύγχρονοί του και μη[3] τον αποκαλούσαν μαθηματικό, ο Απολλώνιος ο εκ Πέργης έχει καθιερωθεί ως μαθηματικός και πρόδρομος του Καρτέσιου , παρ’ότι ο Πτολεμαίος αναφέρει στην αρχή του 12ου βιβλίου της *Σύνταξεως* οτι έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της Πλανητικής Θεωρίας [4]. Ο χιασμός αυτός προχωράει βαθύτερα και στο έργο των δύο ανδρών . Ενώ ο Αρίσταρχος φαίνεται να έχει (επιτυχώς) ασχοληθεί με το πρόβλημα της τριχοτόμησης γωνίας , πράγμα φυσικό άλλωστε αφού τον ενδιέφερε η μέτρηση γωνιών και ήταν τριγωνομέτρης (: α / β = εφα / εφβ) αλλά και εφευρέτης της *σκάφης* , ο Απολλώνιος αντιθέτως ενώ είχε ασχοληθεί με τα άλλα «άλυτα» προβλήματα όπως το Δήλιο[5] , δεν φαίνεται να έχει ασχοληθεί με την τριχοτόμηση .

Στο σημείο αυτό επιτρέψτε μου να παραθέσω ένα σενάριο επιστημονικής φαντασίας :

Αν ο Αρίσταρχος ο Σάμιος μποροούσε να παρατείνει την περιφορά του γύρω απο τον Ηλιο , να παρατείνει δηλαδή τον κύκλο της ζωής του ώστε να ακμάσει συγχρόνως με τον άλλο μεγάλο μαθηματικό και αστρονόμο[6] τον Απολλώνιο τον εκ Πέργης (262 – 190 π.Χ.) και τις Κωνικές Τομές του και ώστε να διαβάζουν μαζύ στη Βιβλιοθήκη της Αλεξανδρείας , η σύνοδος αυτή των δύο μεγάλων θα έφερνε αποτελέσματα μεγάλης λαμπρότητας . Πιθανόν ενδιαφερόμενος για την τριχοτόμηση , να την είχε επιτύχει ο Αρίσταρχος χρησιμοποιώντας κανόνα , διαβήτη και δανειζόμενος και μια κωνική απο τον Απολλώνιο , την παραβολή

$$y^2 = 2x ,$$

πράγμα το οποίο θα περιγράψουμε [7] παρακάτω (Κάνοντας δηλαδή κάτι

---

[3] Dreyer , J.L.E. *A History of Astronomy from Thales to Kepler.*Dover , 1953 , p .140.

[4] Dreyer , J.L.E .*A History of Astronomy from Thales to Kepler.*Dover , 1953 , p .152 .

[5] Μπρίκα , Μ. *Τα Περίφημα’ Αλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της’ Αρχαιότητος.*’Αθ ναι, 1970 .

[6] Knorr , W. R. *The Ancient Tradition of Geometric Problems.*Dover , 1993 , p. 308 .

[7] Αραχωβίτη , Ι.*Εφαρμογές-Τεκμηρίωση της Διδασκαλίας των Θεωρητικών Μαθηματικών.*

ανάλογο με αυτό που πολύ αργότερα έκανε ο Descartes [8] και που ο ίδιος ο Απολλώνιος είχε παραλείψει να κάνει [9].

Με μιά σειρά σχημάτων θα περιγράψουμε τώρα την τριχοτόμηση αυτή , αφού προηγουμένως υπενθυμίσουμε οτι :

Για να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης

$$Z^3 + aZ + b = 0 \quad (1)$$

τέμνουμε την περιφέρεια κέντρου (h , k) που διέρχεται απο την αρχή , με την παραβολή

$$y^2 = 2x ,$$

όπου

$$h = (4 – at^2) / 4 \text{ και } k = - bt^3 / 8 , t \text{ αυθαίρετη παράμετρος .}$$

Διαιρώντας δια t την τεταγμένη του σημείου τομής , έχουμε μια ρίζα της τριτοβάθμιας εξίσωσης (1) .

Η τριχοτόμηση γωνίας ανάγεται στα παραπάνω λόγω της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos\theta .$$

Οπότε εάν δίδεται η γωνία $\omega = 3\theta$ (και ζητείται η θ) , θα είναι γνωστό και το $\cos 3\theta = \beta$. Αρα , η παραπάνω ταυτότητα γράφεται

$$Z^3 – 3Z – \beta = 0 \quad (2)$$

όπου θέσαμε $Z = \cos\theta$ και έχουμε αναχθεί στην (1). Η εύρεση ρίζας της (2) σημαίνει εύρεση του $\cos\theta$. Αρα και της θ . Εδώ εκλέγοντας

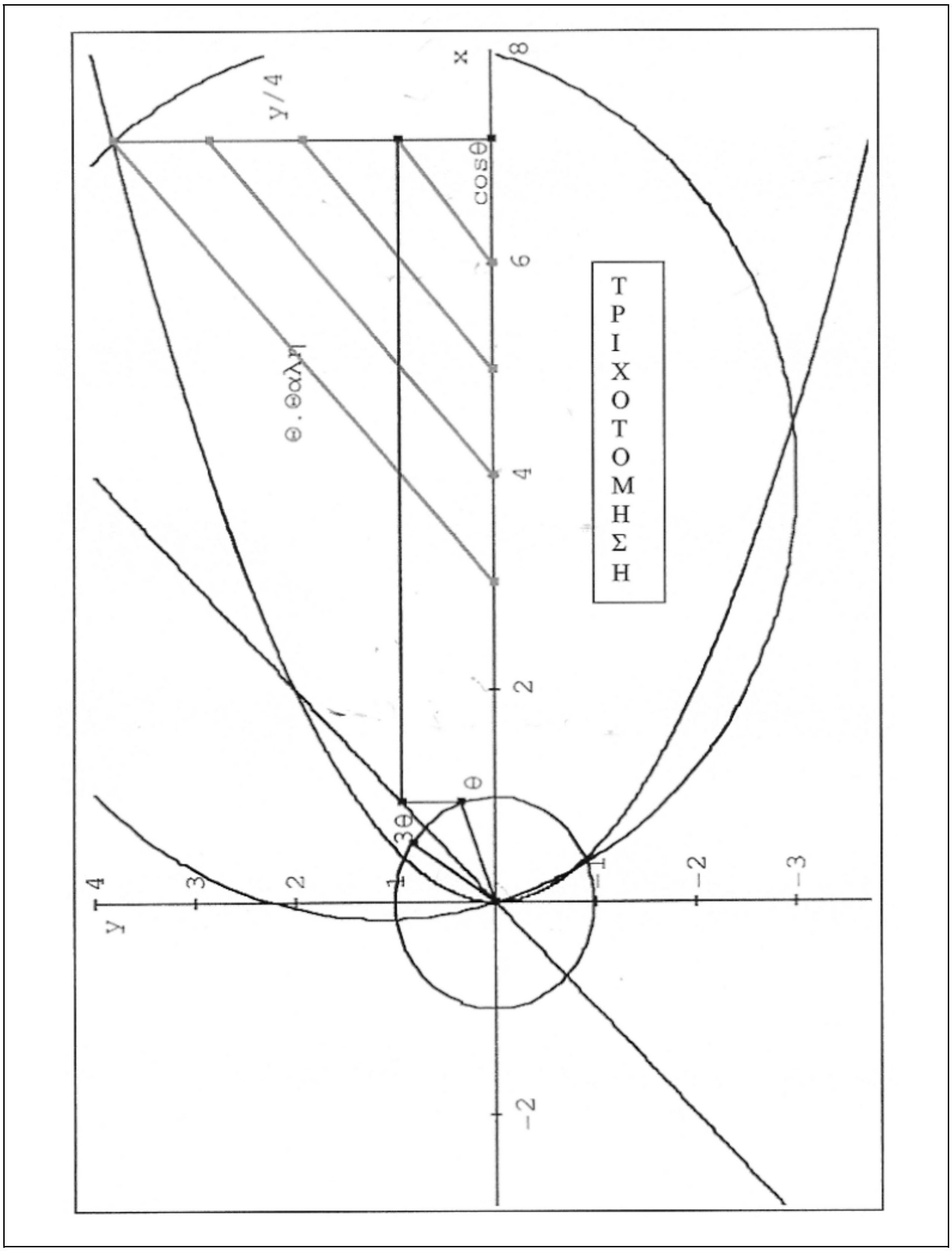
$$t = 4 \quad h = 4 \text{ και } k = 2\beta .$$

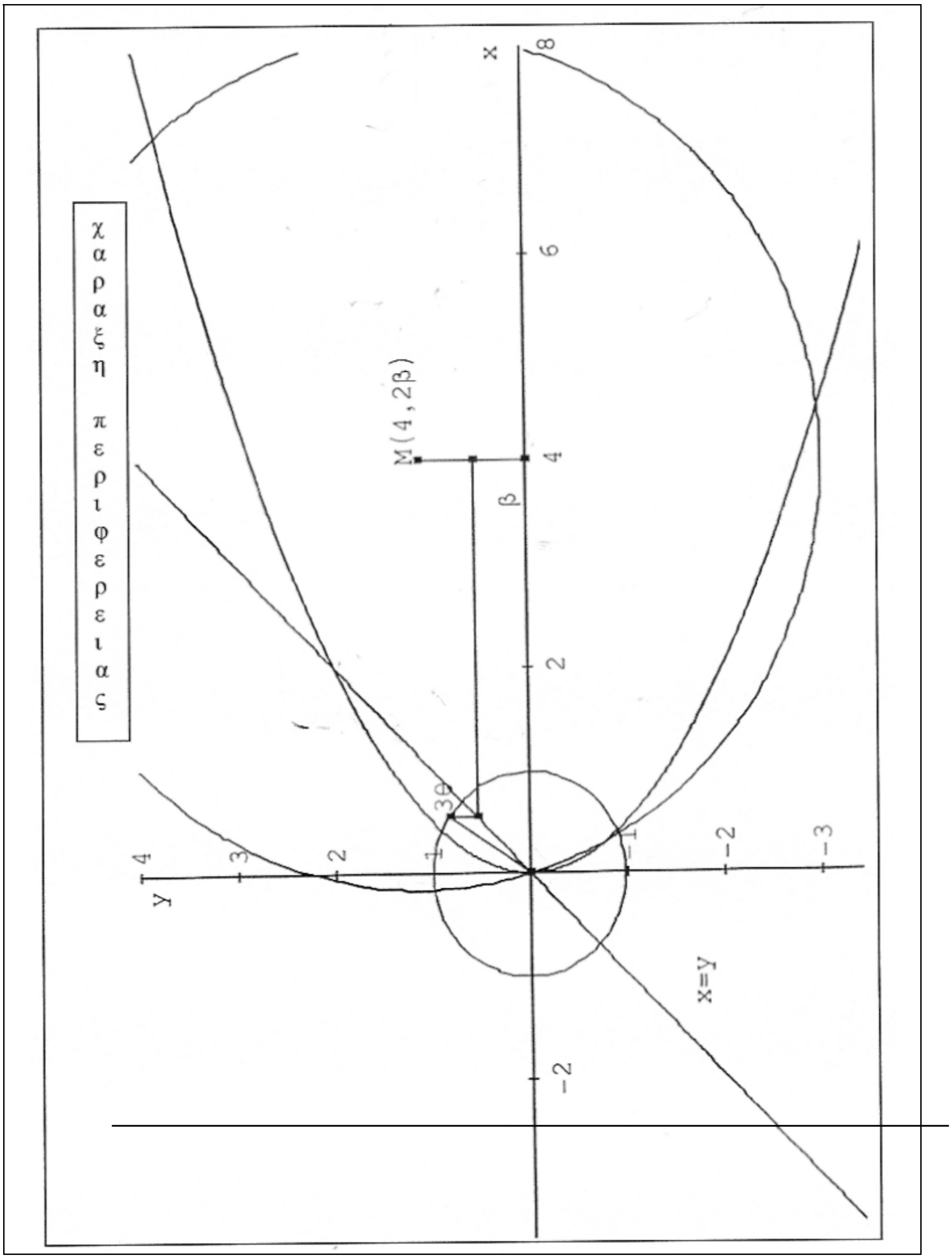
Ακολουθεί η γεωμετρική κατασκευή με κανόνα ,διαβήτη και ένα....σπάγκο (για τη χάραξη της παραβολής) :

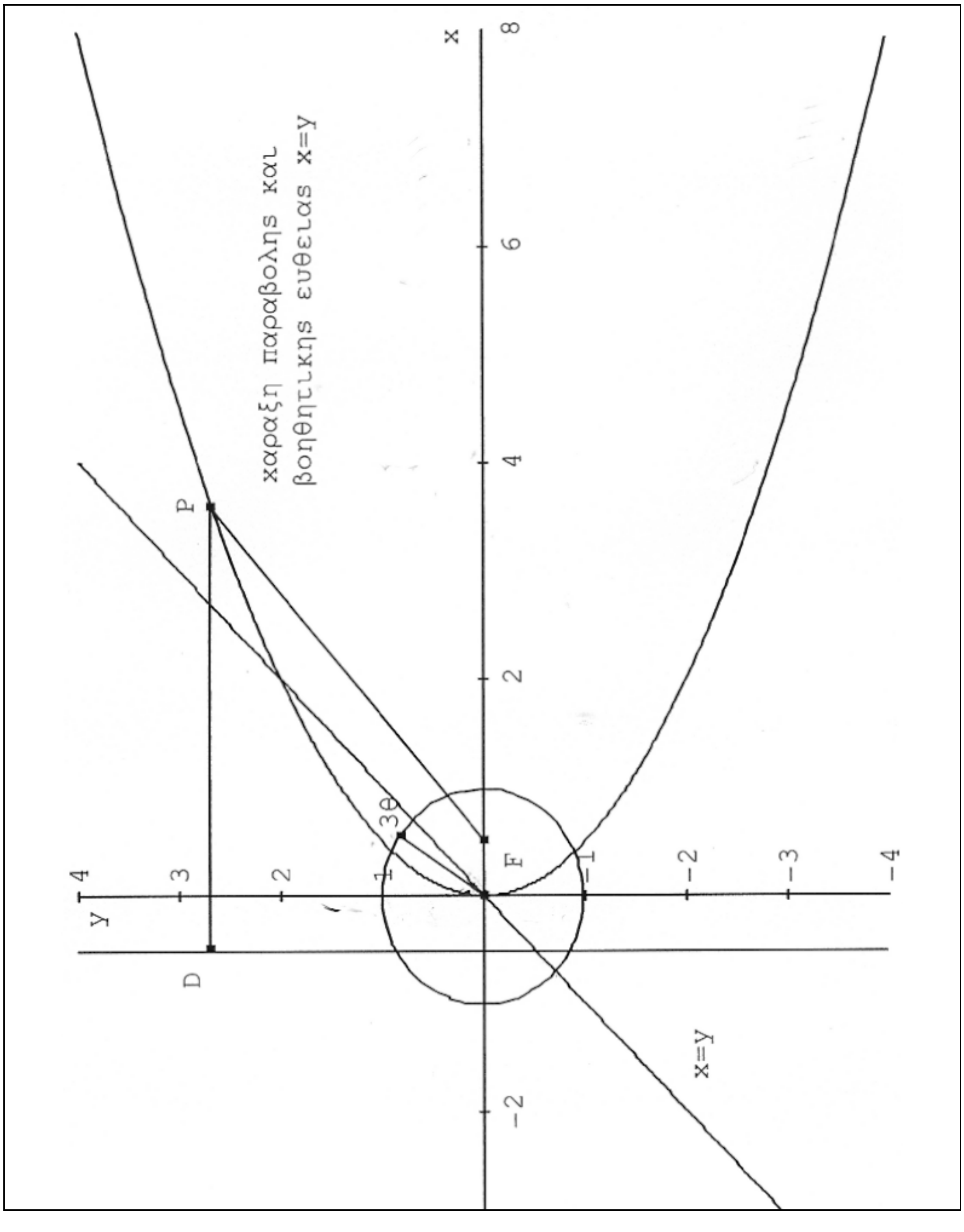
Συμμετρία , Αθήνα , 1998 , σ. 129.

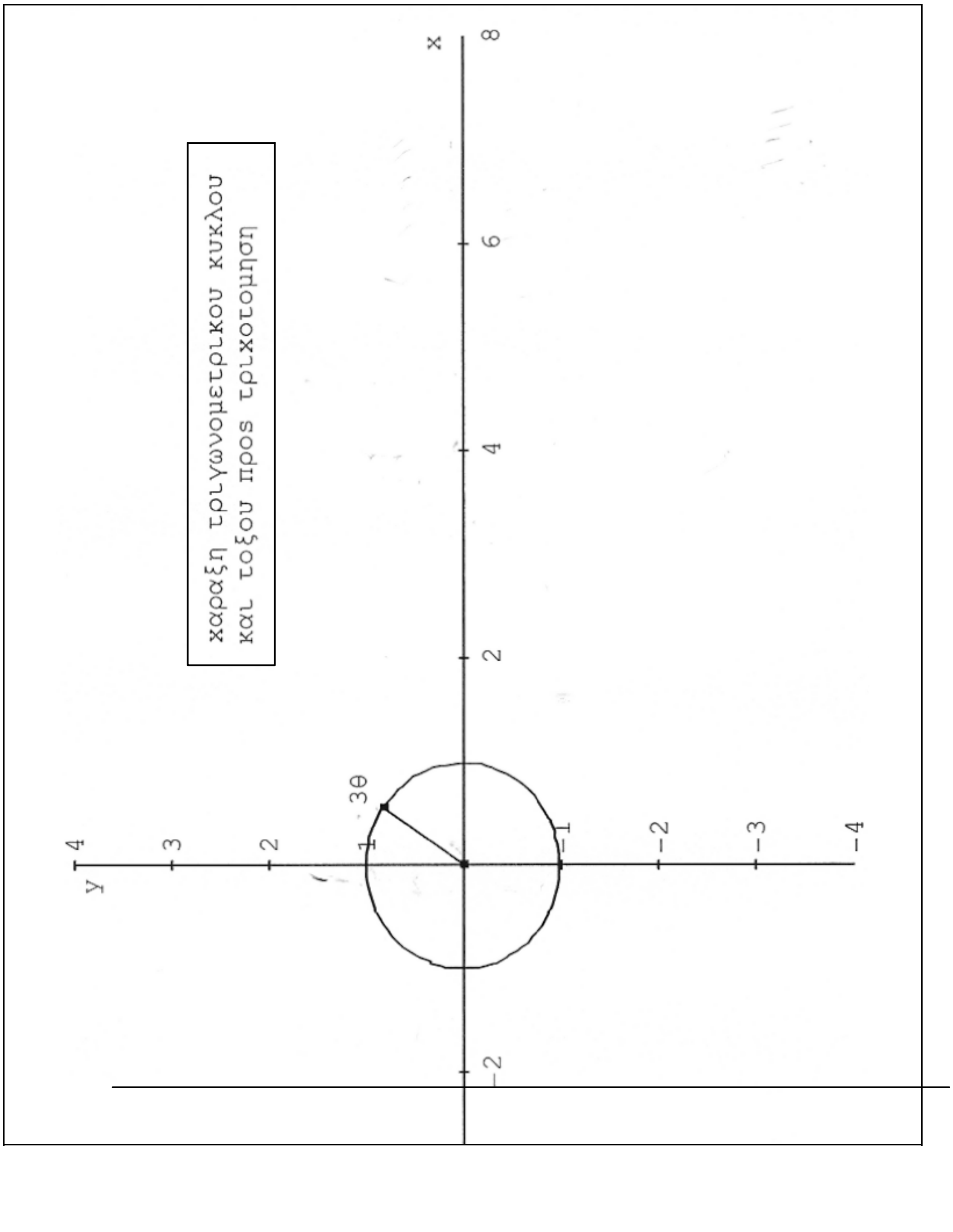
[8] Bos, H. J. M . *Lectures in the History of Mathematics.* A.M.S. , L.M.S. 1990 , p. 26.

[9] Knorr,W.R. *The Ancient Tradition of Geometric Problems.*Dover , 1993 , p. 305 .


ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΗ
cosθ
y/4
θ.θαλή
3θ
θ
x
y


χαραξη περιφερειας
M(4,2β)
β
3θ
x
y
x=y


χαραξη παραβολης και
βοηθητικης ευθειας x=y
x=y
P
D
F
3θ
x
y


χαραξη τριγωνομετρικου κυκλου
και τοξου προς τριχοτομηση
3θ
x
y
8
6
4
2
-2
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

Αρίσταρχος ⇄ Ευκλείδης

Ο Αρίσταρχος αρχίζει το βιβλίο του «Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης» με τις 6 υποθέσεις που ακολουθούν[10] :

1. *Τὴν σελήνην παρὰ τοῦ ἡλίου φῶς λαμβάνειν.*
2. *Τὴν γῆν σημείου τε καὶ κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τῆς σελήνης σφαῖραν .*
3. *Ὅταν ἡ σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνηται, νεύειν εἰς τὴν ἡμετέραν ὄψιν τὸν διορίζοντα τό τε σκιερὸν καὶ τὸ λαμπρὸν τῆ σελήνης μέγιστον κύ κλον .*
4. *Ὅταν ἡ σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνηται, τότε αὐτὴν ἀπέχειν τοῦ ἡλίου ἔλασσον τεταρτημορίου τῷ το τεταρτημορίου τριακοστῷ.*
5. *Τὸ τῆς σκιᾶς πλάτος σεληνῶν εἶναι δύο.*
6. *Τὴν σελήνην ὑποτείνειν ὑπὸ πεντεκαιδέκατον μέρος ζῳδίου .*

Οι παραπάνω 6 υποθέσεις στη νέα ελληνική γλώσσα μπορούν ν'αποδωθούν ως εξής :

1.Η σελήνη παίρνει φώς απο τον ήλιο.

2.Η γή έχει λόγο προς τη σφαίρα της σελήνης ως σημείο προς κέντρο.

3.Οταν σ'εμάς φαίνεται φωτισμένο το μισό της σελήνης γέρνει προς τα μάτια μας ο μέγιστος κύκλος της σελήνης που καθορίζει το σκιερό και το φωτεινό της μέρος.

4.Οταν σ'εμάς ησελήνη φαίνεται φωτισμένη κατά το μισό της μέρος, τότε αυτή απέχει απο τον ήλιο λιγότερο απο ένα τεταρτμόριο και μάλιστα ένα τεταρτημόριο μείον το 1 / 30 του (δηλαδή 87^0) .

5.Το πλάτος της σκιάς της γής περιλαμβάνει δύο σελήνες .

6.Η σελήνη υποτείνει το 1 / 15 του ζωδιακού κύκλου (2^o).

Μετά τις υποθέσεις αυτές ο Αρίσταρχος προχωράει στην αυστηρή

[10] Σταμάτη ,Ε .*Αριστάρχου Σαμίου: Περί Μεγεθών και Αποστημάτων Ηλίου και Σελήνης* . Αθήνα ,1980 .

απόδειξη 18 προτάσεων. Παρ'όλο που υπάρχουν ανακρίβειες στα παραπάνω ,θα ήθελα να ρωτήσω: μήπως η προηγούμενη διαδικασία θυμίζει **αξιωματική θεμελίωση μαθηματικής αστρονομίας** (θα λέγαμε σήμερα) χαράζοντας έτσι μια πορεία παράλληλη προς του Ευκλείδη ;

Βιβλιογραφία

Αραχωβίτης ,Ι.*Εφαρμογές-Τεκμηρίωση της Διδασκαλίας των Θεωρητικών Μαθηματικών.* Συμμετρία, Αθήνα , 1998.

Bos, H.J.M. *Lectures in the History of Mathematics.*A.M.S.,L.M.S.1990.

Dreyer, J.L.E.*A History of Astronomy from Thales to Kepler.*Dover, 1953.

Heath, T.Sir *A History of Greek Mathematics.*V. I, V. II , Dover ,1981.

Heath, T.Sir *Aristarchus of Samos, the Ancient Copernicus.*Oxford, 1959.

Heath ,T.Sir *Greek Astronomy.* Dover ,1991 .

Knorr,W.R. *The Ancient Tradition of Geometric Problems.*Dover,1993.

Μπρίκα,Μ. *Τα Περίφημα Αλυτα Γεωμετρικά Προβλήματα της Αρχαιότητος.* Αθήναι , 1970 .

Σταμάτη, Ε.*Αριστάρχου Σαμίου:Περί Μεγεθών και Αποστημάτων Ηλίου και Σελήνης.* Αθήναι, 1980 .

Abstract

ARISTARCHUS OF SAMOS:
"…the earth revolves round the sun in the circumference of a circle…"
AND NOT ONLY THAT

Aristarchus was an astronomer**,** thus too little attention was given him as a mathematician, especially after he was the first to put forward the above Copernican Heliocentric Hypothesis.

In this note we are proposed to give some hints on his qualities as a ma thematician by a rudimentary comparison to Archimedes , Apollonius and Euclid.