Τα Μαθηματικά στο έργο του Αρίσταρχου

Βαγγέλης Ντζιαχρήστος – Δημήτρης Κοντογιάννης

Περίληψη

Με την παρούσα εργασία μας αποσκοπούμε να ερευνήσουμε τις μαθηματικές έννοιες στο έργο του Αρίσταρχου που έχει διασωθεί και ειδικότερα αυτό το οποίο υπάρχει στο βιβλίο του «*Περί μεγεθών και αποστάσεων του Ηλίου και της Σελήνης*», και οι οποίες όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε έχουν ήδη εντοπισθεί από παλαιότερους ερευνητές όπως οι Heiberg, T.L.Heath κ.ά.

Το μαθηματικό περιεχόμενο στο έργο του Αρίσταρχου είναι όχι μόνο τεράστιο αλλά και εξαιρετικής ποιότητας πράγμα που δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό του Αρίσταρχου ως μαθηματικού.

Κυρίως μας προκαλεί δέος όχι μόνο το μέγεθος των γεωμετρικών του γνώσεων αλλά και ο αριστοτεχνικός τρόπος χρησιμοποίησής τους καθώς και ότι ουσιαστικά δημιουργεί και εργάζεται με λόγους οι οποίοι αντιπροσωπεύουν στην πραγματικότητα τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Δυστυχώς το διασωθέν έργο του Αρίσταρχου είναι μικρό σε σχέση με το απωλεσθέν και για το λόγο αυτό δεν είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε πλήρως το έργο του κυρίως αυτό που αναφέρεται σε θεμελιώδεις έννοιες της Μαθηματικής Ανάλυσης, της θεωρίας των ανισοτήτων κ.λπ.

Είναι γνωστό ότι ο Αρίσταρχος ονομάζονταν από τους σύγχρονούς του αρχαίους Έλληνες «μαθηματικός» που ήθελαν έτσι να τον διακρίνουν από άλλους με το ίδιο όνομα.

Με τον χαρακτηρισμό αυτό τον αναφέρουν πολλοί αρχαίοι συγγραφείς. Ο Ρωμαίος ιστορικός Βιτρούβιος (*Vitruvius*) μας δίνει μια σπουδαία πληροφορία, στο έργο του «*De architectura libri decem*» [12], όπου γράφει ότι ο Αρίσταρχος ασχολήθηκε με τη μαθηματική θεωρία των ηλιακών ωρολογίων. Ως γνωστόν η κατασκευή ενός τέτοιου ωρολογίου, απαιτεί αρκετές μαθηματικές γνώσεις. Ο Αρίσταρχος μάλιστα ήταν ο εφευρέτης ενός βελτιωμένου ηλιακού ωρολογίου, του οποίου η βάση δεν ήταν επίπεδο αλλά η κοίλη επιφάνεια ενός ημισφαιρίου στο οποίο ο γνώμονας ήταν η ακτίνα της σφαίρας του και η σκιά του έδειχνε στην κοίλη επιφάνειά του την ώρα.

Το ηλιακό αυτό ωρολόγιο, προφανώς λόγω του σχήματός του, ονομαζόταν «*σκάφη*», όπως αναφέρει ο σχολιαστής Αέτιος στο έργο του «*Περί αρεσκόντων*» το οποίο έχει απολεσθεί. Όπως αναφέρει ο F. Franciosi [3] ο **πόλος με σκάφη** την κατασκευή του οποίου ο Βιτρούβιος αποδίδει στον Αρίσταρχο ήταν παλαιότερη ανακάλυψη και έχει χρησιμοποιηθεί σε γεωδετικές μετρήσεις από τον Ερατοσθένη.

Είναι ευνόητο ότι η κατασκευή της «*σκάφης*» απαιτούσε υψηλού επιπέδου μαθηματικές, γεωμετρικές αλλά και αστρονομικές γνώσεις.
Δυστυχώς το μεγαλύτερο μέρος των έργων του Αρίσταρχου δεν έχει διασωθεί. Σε μας έφθασαν ελάχιστες πληροφορίες και αναφορές που ξεκινούν από το έργο «*Ψαμμίτης*» του Αρχιμήδη, που γράφτηκε το 216 π.Χ., λίγο μετά το θάνατο του Αρίσταρχου (ή κατά κάποιους ιστορικούς όταν ακόμα ζούσε) και φθάνουν μέχρι κάποιους Βυζαντινούς σχολιαστές.

Το γεγονός αυτό μάλλον οφείλεται στις «*ανορθόδοξες*» απόψεις του Αρίσταρχου περί ηλιοκεντρισμού, απόψεις ριζικά αντίθετες με την «*γεωκεντρική*» θεωρία της Παλαιάς Διαθήκης. Την υπόθεση αυτή έρχεται να ενισχύσει το γεγονός ότι στο μοναδικό διασωθέν έργο του Αρίσταρχου «*Περί μεγεθών και αποστάσεων του Ηλίου και της Σελήνης*» δεν υπάρχει καμιά αναφορά περί της ηλιοκεντρικής θεωρίας, γεγονός που κατά τους μελετητές του έργου του πατέρα της ηλιοκεντρικής θεωρίας θα πρέπει να είναι από τα πρώιμα έργα του, ίσως μάλιστα και το πρώτο.

Όπως ήδη αναφέραμε ο Αρχιμήδης είναι ο πρώτος χρονολογικά που αναφέρεται στον Αρίσταρχο και στο έργο του. Στο έργο του «*Ψαμμίτης*» μας δίνει δύο σημαντικές πληροφορίες:

1) Ο ήλιος και οι απλανείς αστέρες παραμένουν ακίνητοι, ενώ η Γη κινείται περί τον ήλιο σε κυκλική τροχιά, της οποίας κέντρο είναι ο ήλιος.
2) Οι διαστάσεις του Σύμπαντος έχουν άπειρο μέγεθος, όπως προκύπτει και από τη δεύτερη υπόθεση που υπάρχει στο διασωθέν έργο του «Περί μεγεθών και αποστάσεων του Ηλίου και της Σελήνης».

Όμως ο Αρχιμήδης δεν φαίνεται να αναφέρεται στο συγκεκριμένο διασωθέν έργο αλλά ίσως σε κάποιο προηγούμενο. Είτε σ΄ αυτό που διατυπώνει την ηλιοκεντρική θεωρία. Άλλωστε στο κείμενο του «Ψαμμίτη» η υπόθεση αυτή συνδέεται άμεσα με την ηλιοκεντρική θεωρία:
«Εσύ (βασιλιά) γνωρίζεις ότι το «Σύμπαν» είναι το όνομα που δίνουν οι περισσότεροι αστρονόμοι στη σφαίρα, της οποίας το κέντρο είναι το κέντρο της Γης, ενώ η ακτίνα είναι ίση με το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα το κέντρο του Ήλιου και το κέντρο της Γης. Αυτή είναι η συνήθης περιγραφή όπως την

*ακούμε από τους αστρονόμους. Ο Αρίσταρχος όμως παρέθεσε **ένα βιβλίο** που συνίσταται από συγκεκριμένες υποθέσεις, στο οποίο προκύπτει ως συνέπεια των υποθέσεων αυτών, ότι το σύμπαν είναι πολλές φορές μεγαλύτερο από το «σύμπαν» που μόλις αναφέρθηκε» [1].*

Επιπλέον ο Πλούταρχος στο έργο του Ηθικά αναφέρει *«... ὡς ὕστερον Ἀρίσταρχος καί Σέλευκος ἀποδείκνυσαν, ὁ μεν υποτιθέμενος μόνον, ὁ δε Σέλευκος αποφαφαινόμενος».* Δεν γνωίζουμε κατά πόσον είναι αληθής η πληροφορία του Πλούταρχου, ο οποίος δεν φημίζεται για την ακρίβεια των όσων αναφέρει αφού στις λίγες σελίδες του έργου του, Σέλενκον το οποίο διασώθηκε σε αραβική μετάφραση δεν υπάρχει τίποτα σχετικό. Αλλά και αν ακόμα δεχθούμε ότι ο Αρίσταρχος διετύπωσε μιαν υπόθεση, δεν γνωρίζουμε σε ποιο αστρονομικό θέμα την χρησιμοποίησε.

Αφού λοιπόν ο Αρχιμήδης συνεχίζει διατυπώνοντας τις δύο αποδείξεις που αναφέραμε, συμπληρώνει ότι *«η σφαίρα των απλανών αστέρων που έχει κέντρο τον Ήλιο, είναι τόσο μεγάλη, ώστε η ακτίνα του κύκλου της τροχιάς της Γης έχει λόγο προς την απόσταση των απλανών αστέρων όση έχει το κέντρο της σφαίρας προς την επιφάνειά της».*

Από το παραπάνω απόσπασμα του «Ψαμμίτη» προκύπτει ότι:

α) Ο Αρίσταρχος στο ίδιο βιβλίο διατυπώνει τόσο την ηλιοκεντρική, όσο και την υπόθεση για το απειροδιάστατο του Σύμπαντος.
β) Η διατύπωση για το απειροδιάστατο του σύμπαντος όπου η ακτίνα του R ικανοποιεί τη σχέση $\frac{\lim}{\rho \to 0} \; \frac{4\pi R^2}{\rho}$, όπου ρ η ακτίνα του κέντρου της Γης, μάλλον θα πρέπει να οφείλεται στον Αρχιμήδη, που άλλωστε ήταν αρκετά εξοικειωμένος με το λογισμό και τη σημασία των ορίων, εκτός αν υποθέσουμε ότι είναι έκφραση του ίδιου του Αρίσταρχου, οπότε θα πρέπει στις μαθηματικές του γνώσεις να συμπεριλάβουμε και άλλες πολύ σημαντικές και οπωσδήποτε περισσότερο προχωρημένες από αυτές που διαπιστώνουμε στο διασωθέν έργο του.

Ένα άλλο πολύ σημαντικό απόσπασμα στο κείμενο του «*Ψαμμίτη*» είναι αυτό που αναφέρει ότι *«ὑποθέσεων τινῶν ἐξεδῶκεν γραφάς».*

Η φράση αυτή έχει προκαλέσει πολλές συζητήσεις μεταξύ ερευνητών, όπως οι Heiberg, Hultsch, Schiaparelli, Heath και σε άλλους νεότερους. Οι ερμηνείες που δίδονται ξεκινούν από την έκδοση έργου του Αρίσταρχου με τον τίτλο «*Υποθέσεις*», που πιθανόν περιελάμβανε τη δημιουργία σχημάτων ή επεξηγηματικών παραστάσεων, γραπτών σημειώσεων που περιέχουν και μια πρόχειρη αιτιολόγηση με στοιχεία αποδεικτικής διαδικασίας.

Από όσα αναφέραμε προκύπτει ότι οι πηγές μας για τα Μαθηματικά στο έργο του Αρίσταρχου είναι εξαιρετικά περιορισμένες, αφού κυρίως αφορούν στο έργο του «*Περί αποστάσεων και μεγεθών . .*». Για το λόγο αυτό, ενώ έχουμε πλήρως εξακριβωμένο το γεγονός ότι ο Αρίσταρχος ήταν ο ίδιος ο ιδρυτής της ηλιοκεντρικής θεωρίας, όχι μόνο από τον Αρχιμήδη, αλλά και τον Πλούταρχο, τον Διογένη τον Λαέρτιο κ.ά., για πολλά μαθηματικά επιτεύγματα του Αρίσταρχου έχουμε μόνο νύξεις είτε σιβυλλικούς υπαινιγμούς.

Πριν απ΄ όλα δεν γνωρίζουμε με ποια μαθηματικά εφόδια έφθασε στη θεωρία του ηλιοκεντρικού συστήματος, πάντως το μαθηματικό του οπλοστάσιο θα πρέπει να ήταν ιδιαίτερα σημαντικό.

Ο T.L. Heath στο [4] σελ.317 αναφέρει ότι ο Πάππος στο διασωθέν VI βιβλίο της «*Συναγωγής*» θεωρεί σαν corpus της «ελάσσονος Αστρονομίας» τα έργα του Αυτόλυκου «*περί κινουμένης σφαίρας*», του Ευκλείδη «*Οπτικά*» και «*Φαινόμενα*», του Θεοδοσίου «*Σφαιρικά*» και «*περί ημερών και νυκτών*», καθώς και το διασωθέν έργο του Αρίσταρχου.

Ο κατάλογος αυτός είναι ελλιπής αφού δεν περιλαμβάνει αρκετά αξιόλογα έργα των Θεοδόσιου, Υψικλή, Μενελάου κ.ά. αν και ο Πάππος αποδεδειγμένα γνώριζε τα έργα αυτά, μάλιστα από τα «Σφαιρικά» του Μενελάου είχε χρησιμοποιήσει και αρκετές τέσσερις (4) προτάσεις.

Επομένως η μη αναφορά άλλου έργου του Αρίσταρχου δεν σημαίνει αναγκαστικά και τη μη ύπαρξη και άλλων αξιόλογων αστρονομικών έργων.

Το διασωθέν έργο «*Περί μεγεθών και αποστάσεων . .*» μπορεί κατά τον Πάππο ν΄ αποτελεί μέρος της ελάσσονος Αστρονομίας, όμως σύμφωνα με τους νεότερους ιστορικούς αποτελεί ένα από τα πιο λαμπρά κείμενα της αρχαίας ελληνικής επιστήμης και το μοναδικό διασωθέν έργο όπου η Γεωμετρία παρουσιάζεται με μια νέα μορφή που λίγο αργότερα θα σχηματοποιηθεί στην Τριγωνομετρία. Είναι δηλαδή ένα αμιγές γεωμετρικό βιβλίο όπου οι τριγωνομετρικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται με τη μορφή γεωμετρικών λόγων και αναδεικνύει τον Αρίσταρχο σε ένα σημαντικό γεωμέτρη και πρόγονο της τριγωνομετρίας.

Το βιβλίο αρχίζει με την παράθεση έξι (6) υποθέσεων που θυμίζουν τα ευκλείδεια αιτήματα, όμως σ' αντίθεση με αυτά μερικές δεν είναι αληθείς. Ο ίδιος μάλιστα ο Αρίσταρχος έδειξε σε μεταγενέστερο έργο του όπως αναφέρει ο Αρχιμήδης, ότι η δεύτερη υπόθεση δεν ήταν αληθής, αφού σύμφωνα μ΄ αυτή η φαινόμενη διάμετρος του ήλιου είναι 2^o και ο ίδιος την υπολόγισε αργότερα σε μισή μοίρα.

Αυτό βέβαια συνέβη μεταγενέστερα και θα πρέπει να περιλαμβάνονται σε έργο το οποίο έχει απολεσθεί. Ο Αρχιμήδης μας περιγράφει πρόχειρα τη μέθοδο με την οποία ο Αρίσταρχος κατέληξε στο συμπέρασμα αυτό, όμως δεν μας δίνει πληροφορίες για το πώς και με ποια μέσα εργάσθηκε.

Όπως γνωρίζουμε σήμερα κάποιες από τις έξι υποθέσεις του Αρίσταρχου ήταν γνωστές και σε προγενέστερους. Π.χ. ο Εύδοξος ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε με επιστημονικό τρόπο την υπόθεση ότι η ήλιος και η σελήνη απέχουν σταθερές αποστάσεις από τη γη, γεγονός που αποτελεί μέρος της πρώτης υπόθεσης του Αρίσταρχου.

Μετά την παράθεση των υποθέσεων παρακολουθούμε την ανάπτυξη δεκαοκτώ (18) προτάσεων που πραγματοποιείται παραγωγικά κατά τον ίδιο τρόπο με τα κλασσικά μαθηματικά έργα της εποχής.

Για την απόδειξη των 18 προτάσεων ο Αρίσταρχος χρησιμοποιεί, χωρίς όμως να αποδεικνύει, κάποιες άλλες πολύ σημαντικές μαθηματικές προτάσεις, πράγμα που σημαίνει ότι αυτές υπήρχαν σε προγενέστερα έργα του Αρίσταρχου είτε άλλων Ελλήνων μαθηματικών.

Οι προτάσεις αυτές θα μπορούσαν σήμερα να διατυπωθούν ως εξής:

1) Αν θ το μέτρο μιας γωνίας σε ακτίνια και $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, τότε η συνάρτηση $f(x)=\frac{\eta\mu\theta}{\theta}$ είναι φθίνουσα, ενώ η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{\varepsilon\varphi\theta}{\theta}$ είναι αύξουσα στο $(0,\frac{\pi}{2})$.

2) Αν θ, φ τα μέτρα δύο γωνιών σε ακτίνια με $0<\theta<\varphi<\frac{\pi}{2}$, τότε ισχύει $\frac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\theta}<\frac{\varphi}{\theta}<\frac{\varepsilon\varphi\,\varphi}{\varepsilon\varphi\,\theta}$.

Από τη μελέτη των προτάσεων αυτών προκύπτουν ουσιώδη συμπεράσματα για τις μαθηματικές έννοιες που ήταν γνωστές στον Αρίσταρχο. Π.χ. θα πρέπει να γνώριζε την έννοια των συμμεταβαλόμενων ποσών και μάλιστα όχι μόνο απλών αλλά και αρκετά σύνθετων, όπως π.χ. τα ποσά $\frac{\eta\mu\theta}{\theta}, \frac{\varepsilon\varphi\theta}{\theta}$ με $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$.

Η καθαρά γεωμετρικά απόδειξη της (1), την οποία πιθανώς θα προτιμούσε ο Αρίσταρχος δεν είναι τόσο απλή, αντίθετα με την αναλυτική απόδειξη της πρότασης η οποία έγκειται στη μελέτη των συναρτήσεων

$f(\theta)=\dfrac{\eta\mu\theta}{\theta}$ και $\varphi(\theta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\theta}{\theta}$.

Πράγματι $f'(\theta)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\theta - \eta\mu\theta}{\theta^2}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta(\theta-\varepsilon\varphi\theta)}{\theta^2}<0$, αφού $\theta<\varepsilon\varphi\theta$, δηλαδή η συνάρτηση $f(\theta)$ είναι φθίνουσα στο $(0,\frac{\pi}{2})$.

Όμοια $\varphi'(\theta)=\left(\dfrac{\varepsilon\varphi\theta}{\theta}\right)'=\left(\dfrac{\eta\mu\theta}{\theta\sigma\upsilon\nu\theta}\right)'=$

$$=\frac{\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta-\theta\eta\mu\theta)}{\theta^2\,\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{\theta(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)-\eta\mu\theta}{\theta^2\,\sigma\upsilon\nu^2\theta}=\frac{\theta-\eta\mu\theta}{\theta^2\,\sigma\upsilon\nu^2\theta}>0,$$

δηλαδή η συνάρτηση $\varphi(\theta)$ είναι αύξουσα στο $(0,\frac{\pi}{2})$.

Και η ανισότητα $\dfrac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\theta}<\dfrac{\varphi}{\theta}<\dfrac{\varepsilon\varphi\,\varphi}{\varepsilon\varphi\,\theta}$ (2) απαιτεί μια πολύπλοκη αλλά στοιχειώδη απόδειξη, όπως αυτή π.χ. ο Commandino (δες [5]) με την βοήθεια τριγωνομετρικών ανισοτήτων οι οποίες όμως είναι ισοδύναμες με γεωμετρικούς λόγους.

Η απόδειξη με τη βοήθεια στοιχειωδών εννοιών της Ανάλυσης είναι απλούστατη.

Συγκεκριμένα αρκεί να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των συναρτήσεων $f\left(\dfrac{\varphi}{\theta}\right)=\dfrac{\eta\mu\varphi}{\eta\mu\theta}-\dfrac{\varphi}{\theta}$ και $\varphi\left(\dfrac{\varphi}{\theta}\right)=\dfrac{\varphi}{\theta}-\dfrac{\varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\theta}$ στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$.

Ο γνωστός Γάλλος ιστορικός P.Tannery [11], προκειμένου να αιτιολογήσει τις τριγωνομετρικές προτάσεις που είναι ισοδύναμες των γεωμετρικών προτάσεων του Αρίσταρχου διατυπώνει μια θεωρία αρκετά λογικοφανή. Καταρχάς ξεκινά από προφανείς σχέσεις, όπως π.χ. $\eta\mu\frac{\pi}{2}=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=$ $=1$, $\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, όπου μια προσέγγιση το $\sqrt{2}$ είναι ο ρητός $\frac{7}{5}$ καταλήγει σε σχέσεις όπως:

(i) Αν $\kappa>1$ τότε $\eta\mu\dfrac{\pi}{2\kappa}>\dfrac{1}{\kappa}$ και $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2\kappa}=\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2\kappa}\right)>\dfrac{\kappa-1}{\kappa}$

(ii) Αν $\kappa>2$ τότε $\eta\mu\dfrac{\pi}{2\kappa}<\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{2\kappa}<\dfrac{2}{\kappa}$

(iii) Αν $\kappa>3$ τότε $\eta\mu\dfrac{\pi}{2\kappa}>\dfrac{3}{2\kappa}$

(iv) Αν κ>4 τότε ημ $\frac{\pi}{2\kappa} <$ εφ $\frac{\pi}{2\kappa} < \frac{5}{3\kappa}$

Από τις (iii), (iv) παίρνουμε ότι $\frac{3}{2\kappa} <$ ημ$\frac{\pi}{2\kappa} < \frac{5}{3\kappa}$.

Αν ο Αρίσταρχος γνώριζε ότι $\pi \cong \frac{22}{7}$ θα μπορούσε να υπολογίσει ότι ημ $\frac{\pi}{2\kappa} < \frac{11}{7\kappa}$.

Π.χ. στην πρόταση 7 ο Αρίσταρχος υπολογίζει φράγματα του ημ3^o δηλαδή του ημ $\frac{\pi}{60} =$ ημ $\frac{\pi}{2\cdot 30}$, οπότε κ = 30 και βρίσκει $\frac{1}{18} >$ ημ$3^o > \frac{1}{20}$.

Ας παρακολουθήσουμε τους συλλογισμούς του Αρίσταρχου για τη χρήση των υποθέσεων αυτών στην αποδεικτική διαδικασία μιας πρότασης του βιβλίου του, π.χ. της πρότασης 7.

Η Πρόταση 7 αναφέρει ότι:

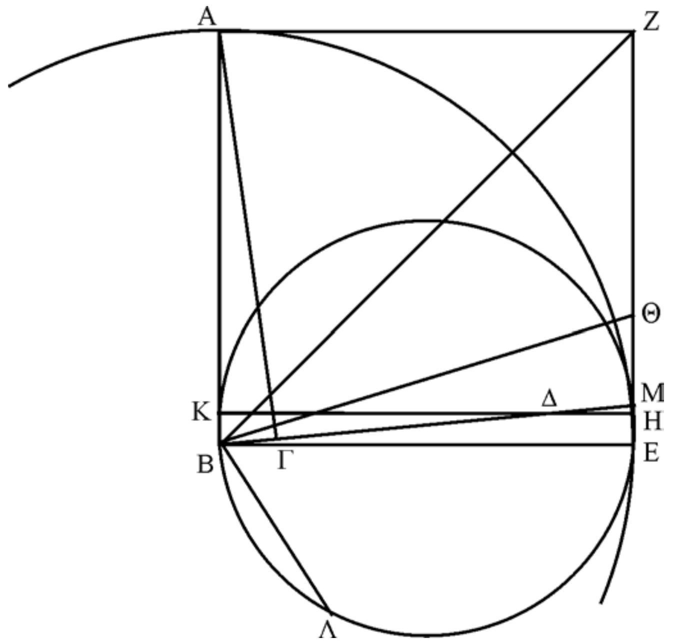
Η απόσταση του Ήλιου από τη Γη είναι μεγαλύτερη από το 18-πλάσιο, αλλά μικρότερη από το 20-πλάσιο της απόστασης της Σελήνης από τη Γη.

Η απόδειξη του Αρίσταρχου έχει ως εξής:

Έστω Α το κέντρο του Ηλίου και Β το κέντρο της Γης. Φέρουμε την ΑΒ και έστω Γ το κέντρο της Σελήνης τη στιγμή της διχοτόμησης δηλαδή τη στιγμή που η Σελήνη φαίνεται σαν ημικυκλικός δίσκος από την Γή. Έστω ότι η ΒΓ τέμνει στο Δ τον κύκλο (Β,ΒΑ) στον οποίο κινείται ο Ήλιος. Επειδή το Γ είναι το κέντρο της Σελήνης τη στιγμή της διχοτόμησης θα είναι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 90^o$.

Έστω ΒΕ κάθετος στην ΒΑ. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΒΕΖ (Σχ. 1)

Τότε το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{E}\Delta}$ είναι το $\frac{1}{30}$ του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{E}\Delta\mathrm{A}}$, οπότε σύμφωνα με την 4η υπόθεση κατά την οποία όταν η Σελήνη φαίνεται να διχοτομείται, τότε η απόστασή της από τον Ήλιο είναι μικρότερη από ένα τεταρτημόριο κατά το ένα τριακοστό του τεταρτημορίου.



Σχήμα 1

Επομένως $A\hat{B}\Gamma = 90^o - \frac{1}{3}\cdot 90^o = 87^o$, άρα $\Delta\hat{B}E = B\hat{A}\Gamma = 3^o$. Φέρουμε τη BZ και τη διχοτόμος BΘ της γωνίας $Z\hat{B}E$. Επειδή $Z\hat{B}E = 45^o$ θα είναι και $\Theta\hat{B}E = 22,5^o$. Αλλά $\Delta\hat{B}E = 3^o$ επομένως ο λόγος των μέτρων των γωνιών $\frac{\Theta\hat{B}E}{\Delta\hat{B}E}$ είναι $\frac{15}{2}$ και αφού $\frac{\Theta\hat{B}E}{\Delta\hat{B}E} < \frac{\varepsilon\varphi\Theta\hat{B}E}{\varepsilon\varphi\Delta\hat{B}E}$, τότε $\frac{\varepsilon\varphi\Theta\hat{B}E}{\varepsilon\varphi\Delta\hat{B}E} > \frac{15}{2}$ ή $\frac{\Theta E}{EM} > \frac{15}{2}$, όπου Μ η τομή της ΒΔ με την ΕΖ. Επιπλέον αφού ΑΒΕΖ τετράγωνο τότε $BZ^2 = 2BE^2$ Όμως αφού ΒΘ διχοτόμος της $E\hat{B}Z$ θα ισχύει $\frac{BZ}{BE} = \frac{Z\Theta}{\Theta E} \Rightarrow \frac{BZ^2}{BE^2} = 2 = \frac{Z\Theta^2}{\Theta E^2} \Rightarrow Z\Theta^2 = 2\Theta E^2$ και επειδή $49 < 2\cdot 25 = 50$, οπότε $\frac{Z\Theta^2}{\Theta E^2} > \frac{49}{25}$ άρα $\frac{Z\Theta}{\Theta E} > \frac{7}{5}$, συνεπώς $\frac{ZE}{\Theta E} > \frac{7+5}{5} = \frac{12}{5}$.

Αλλά έχουμε επίσης αποδείξει ότι $\frac{\Theta E}{EM} > \frac{15}{2}$ επομένως $\frac{ZE}{\Theta E}\cdot\frac{\Theta E}{EM} > \frac{12}{5}\cdot\frac{15}{2} = \frac{18}{1}$ δηλαδή ΖΕ>18ΜΕ οπότε ΖΕ=ΒΕ>18ΜΕ.

Από τα όμοια τρίγωνα ΒΕΜ και ΒΑΓ έχουμε $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{ME}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} > 18 \Rightarrow \mathrm{AB} > 18\mathrm{B\Gamma}$.

Όμως ΑΒ είναι η απόσταση του Ηλίου από τη Γη ενώ ΓΒ είναι η απόσταση της Σελήνης από τη Γη, επομένως η απόσταση του Ηλίου από τη Γη είναι 18 φορές μεγαλύτερη από την απόσταση της Σελήνης από την Γη.

Θα δείξουμε ότι η απόσταση του Ηλίου από τη Γη είναι μικρότερη από το 20-πλάσιο της απόστασης Σελήνης – Γής. Από το Δ φέρνουμε ΔΚ παράλληλη στην ΕΒ, οπότε ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο ΔΚΒ κύκλος, έχει τη ΔΒ διάμετρο και $\Delta\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} = 90^{\circ}$. Αφού $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 3^{\circ}$ θα είναι $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{K} = 3^{\circ}$, οπότε το τόξο $\overset{\frown}{\quad}$ είναι το $\frac{1}{60}$ του κύκλου. Αν ΒΛ πλευρά του κανονικού 6-γωνου του εγγεγραμμένου στον κύκλο το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B\Lambda}}$ θα είναι ίσο με $\overset{\frown}{\quad}$ και $\frac{\overset{\frown}{\mathrm{B\Lambda}}}{\overset{\frown}{\mathrm{BK}}} > \frac{\mathrm{B\Lambda}}{\mathrm{BK}}$ ή $10 > \frac{\mathrm{B\Lambda}}{\mathrm{BK}}$ οπότε 10ΒΚ>ΒΛ και επειδή ΔΒ=2ΒΛ αφού η ΔΒ διάμετρος, τότε 20ΒΚ>ΒΔ. Όμως $\frac{\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{BK}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} \Rightarrow \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{AB}} > \frac{1}{20}$ ή ΑΒ<20ΒΓ όπου ΑΒ η απόσταση του Ηλίου από τη Γη και ΒΓ η απόσταση της Σελήνης από τη Γη οπότε 18ΒΓ<ΑΒ<20ΑΒ.

Από την απόδειξη που δίνει ο Αρίσταρχος αντιλαμβανόμαστε ότι δικαίως είχε το όνομα του μαθηματικού, αφού αναδεικνύεται σε μέγιστο χειριστή του μαθηματικού λογισμού με λόγους (δηλ. Τριγωνομετρικά μεγέθη) τον οποίον εν πολλοίς ο ίδιος δημιούργησε.

Εδώ μάλιστα η παρουσία και αναγκαιότητα των τριγωνομετρικών αυτών μεγεθών είναι τόσο στενά συνδεδεμένη με την ίδια την πρόταση 7, ώστε δικαιολογημένα θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι ο πλέον βασικός λόγος για την ανακάλυψη και την ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας ήταν η Αστρονομία όπως αρκετοί θεωρούν ότι και η ανάπτυξη της θεωρίας των κωνικών τομών έχει αφετηρία την Αστρονομία. Είναι αποδεδειγμένο ιστορικά ΄τι ένας από αυτούς που συνέβαλαν στην ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας είναι ο άραβας μαθηματικός al Tusi που συγκέντρωσε όλα τα επιτεύγματα των Ελλήνων μαθηματικών της Ελληνιστικής περιόδου και τα χρησιμοποίησε στην Αστρονομία. Ο al Tusi ήταν οπαδός της ηλιοκεντρικής θεωρίας του Αρίσταρχου και λέγεται ότι ο Κοπέρνικος έχει πάρει αρκετά στοιχεία από το έργο του al Tusi ο οποίος γνώριζε το έργο του Αρίσταρχου. Από όσα ήδη αναφέραμε, προκύπτει το συμπέρασμα ότι τα Μαθηματικά στο διασωθέν έργο του Αρίσταρχου βεβαίως και δεν ήταν το ίδιο σημαντικά π.χ. με τα Μαθηματικά του έργου του Ευκλείδη ή του Αρχιμήδη.

Ήταν όμως αναμφίβολα σημαντικά γιατί η χρήση τους ήταν αναγκαία για την πραγμάτωση των αστρονομικών έργων του Αρίσταρχου, ενός έργου τεράστιας σημασίας για την Αστρονομία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αρχιμήδης Άπαντα (εκ. Ε. Σταμάτης), Αθήνα 1972.
2. Ευκλείδη Στοιχεία ΚΕΕΠΕΚ, Αθήνα 2000.
3. Franciosi, F. La origini scientifiche dell' astronomia greca, Roma 1990.
4. Heath, T.L. Aristarchus of Samos, the aucient Copernicus Oxford 1913 (επα. 1981).
5. Heath, T.L. A History of Greek Mathematics, Oxford 1921 (Ελλ. Μετ. ΚΕΕΠΕΚ 2000).
6. Heiberg, J.L. Les premiers manuscripts de la Bibliotheque Papale, ODVF 1891 σελ. 305–318.
7. Hoppe, E. Mathematik und Astronomie im Klassischen Altertum, Wiesbaden 1966.
8. Jakob, O. Die Rereption des "antiken Copernicud" Aristarch von Samow in Antike und Nehreit, to Anregung 29 (1983) σελ. 299-314.
9. Noack, B. Aristarch von Samos, Wiesbaden 1992.
10. Srabo, A. – Manla, E. Enclima-Εγκλιμα, Untersuchungen zur Fruhgeschichte der griechischen Astronomie, … Athen 1982.
11. Tannery, P. Scholies sur Aristarque de Samos, στο RPh 11(1887).
12. Vitruvius. Δέκα βιβλία, Θεσσαλονίκη 1997.

Abstract

In this paper we examine the mathematical content of Aristarchus work. The important and innovative methods existing in his work made him known as the "mathematician" of his time.

Unfortunately, we are not in position to know all about the mathematical content of his work, since the majority of it has not been preserved.

However, his work "on the sizes and distances of the Sun and Moon" renders Aristarchus as a great mathematician and is considered to be the first of mathematical Astronomy.