



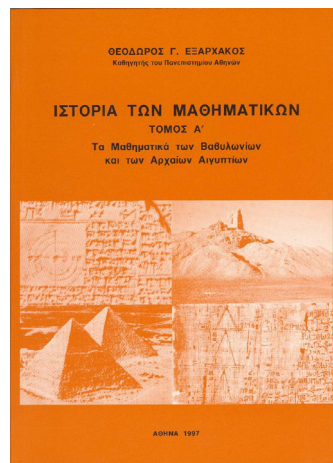
**Βιβλιοπαρουσίαση**  
**Θεόδωρος Εξαρχάκος:**  
**Ιστορία των Μαθηματικών / Τα Μαθηματικά των λαών της**  
**αρχαίας Ανατολής**

**Γεώργιος Η. Μπαράλης\***

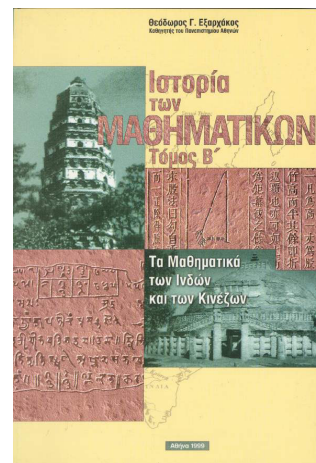
\*Διδάκτωρ του Πανεπιστημίου Αθηνών

**Περίληψη**

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε την ιστορία των Μαθηματικών όπως αυτή αναλύεται στο δίτομο έργο του Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Θεοδώρου Εξαρχάκου



**ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΟΣ Α΄**  
**Τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και**  
**των Αρχαίων Αιγυπτίων**  
Αθήνα, 1997 σελ. 656



**ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΟΣ Β΄**  
**Τα Μαθηματικά των Ινδών και**  
**των Κινέζων**  
Αθήνα, 1999 σελ. 600

Αναλύουμε κριτικά το περιεχόμενο του έργου αυτού σε ό,τι αφορά την επιστημονική του ακρίβεια, τις βασικές του πηγές, τον τρόπο παρουσίασης των διαφόρων ενοτήτων, τα παραδείγματα που χρησιμοποιεί ο συγγραφέας, την κριτική που ο ίδιος κάνει σε παλαιότερους συγγραφείς, τις προσωπικές του απόψεις και τη δικαιολόγηση αυτών των απόψεων.

## 1. Εισαγωγή

Το παρόν δίτομο έργο αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα και σοβαρότερα ερευνητικά και επιστημονικά βήματα του ελληνικού αλλά και ευρύτερα του διεθνούς χώρου σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών. Ανήκει στο είδος των προσωπικών δημιουργημάτων και επιτευγμάτων, τα οποία έχουν γίνει σπάνια στην εποχή μας, εποχή της ομαδικής εργασίας. Εντυπωσιάζει τόσο χάρη στην κυρίαρχη κατοχή του υλικού και στη λεπτομερή γνώση των πηγών όσο και χάρη σε μια αίσθηση για τις μεγάλες στιγμές εξέλιξης της μαθηματικής και φιλοσοφικής σκέψης των ανθρώπων της μακρινής εκείνης εποχής, που διατηρείται αμείωτη μέσα σε εκατοντάδες σελίδες και που μεταδίδεται ευχάριστα στον αναγνώστη. Είναι ένα έργο για σκέψη, για γνώση και απόλαυση από την αρχή μέχρι το τέλος, που με εμπνευσμένο και δελεαστικό τρόπο μας παρουσιάζει την ανάπτυξη των Μαθηματικών των λαών της Ανατολής, όπως αυτά ξεκίνησαν αρχικά, αναπτύχθηκαν και εξελίχθηκαν από την πανάρχαια εποχή. Είναι ένα έργο θαυμάσιο, που είναι απαραίτητο να διαβαστεί από όλους εκείνους που ενδιαφέρονται για την αρχή, την εξέλιξη, αλλά και το μέλλον της μαθηματικής σκέψης. Διαβάζεται συναρπαστικά και αυτό οφείλεται στην επιδεξιότητα του συγγραφέα, που έχει την ικανότητα να σκηνοθετεί και να παρουσιάζει με τρόπο δελεαστικό την ιστορία των ιδεών.

Αν τα βιβλία αυτά του Θ. Εξαρχάκου, παρά τη μεγάλη έκτασή τους, διαβάζονται ευχάριστα, αυτό οφείλεται πρώτιστα στο ότι ο συγγραφέας συναρπάζει τον αναγνώστη ταξιδεύοντας την σκέψη του διαμέσου των αιώνων στα αντιπροσωπευτικότερα πολιτιστικά επιτεύγματα και στην αρχέγονη μαθηματική εμπειρία των πανάρχαιων λαών της Ανατολής. Ξετυλίγει τη μαγεία των διανοημάτων των ανθρώπων της μακρινής εκείνης εποχής μπροστά στα μάτια του αναγνώστη, που όπως λέει ο ίδιος, *"αν παρουσιαστούν όπως ακριβώς είναι και αν ληφθούν υπόψη οι συνθήκες των εποχών στις οποίες αναπτύχθηκαν, έχουν τη δική τους φυσιογνωμία, τη δική τους φιλοσοφία, τη δική τους αξία και το δικό τους μεγαλείο"*.

Το έργο του Θ. Εξαρχάκου είναι εκπληκτικό από πολλές απόψεις:

- ♦ Ως προς την επιστημονική ακρίβεια, ως προς την πληθώρα των γεωγραφικών, ιστορικών, κοινωνικών, πολιτιστικών και φιλοσοφικών στοιχείων.
- ♦ Ως προς την παρουσίαση αξιόπιστων πηγών, ως προς τη γλώσσα, το ύφος και τη δομή του κειμένου, ως προς την έκταση.
- ♦ Ως προς την άμεση επαφή με το υλικό και την ταυτόχρονη κριτική και αμερόληπτη στάση απέναντι στο εξεταζόμενο αντικείμενο.
- ♦ Ως προς το πλήθος των κατάλληλων και δεικτικών παρατηρήσεων, τόσο ως προς το εξεταζόμενο θέμα όσο και ως προς την κριτική στάση απέναντι στις απόψεις κορυφαίων ερευνητών του συγκεκριμένου χώρου.
- ♦ Ως προς τον κυρίαρχο χειρισμό τόσο της ιστορικής όσο και της συστηματικής επιχειρηματολογίας.

Ο συγγραφέας δεν έγραψε ένα βιβλίο απλά διδακτικό και "λόγιο", αλλά έδωσε κάτι περισσότερο από ένα κομμάτι ιστορίας και φιλοσοφίας των Μαθηματικών των λαών της Ανατολής. Με τρόπο προσωπικό και κυρίαρχο συνέλαβε την ιδέα εξαρχής και παρουσίασε στις ενότητες του έργου του δομικές σκέψεις της φιλοσοφίας και της πνευματικής ιστορίας της Ανατολής.

Με αφορμή τις πολλές εικόνες, τους πίνακες και τις αναπαραστάσεις που υπάρχουν, ο αναγνώστης θα ανακαλύψει πώς επικοινωνούσαν, πώς έγραφαν, πώς μετρούσαν και πώς υπολόγιζαν οι μακρινοί και αναμφίβολα μεγάλοι πολιτισμοί, όπως ο βαβυλωνιακός, ο αιγυπτιακός, ο ινδικός και ο κινέζικος. Θα "διασκεδάσει" ακολουθώντας τα στάδια γραφής ενός αριθμού στο εξηναδικό σύστημα αρίθμησης με βαβυλωνιακό συμβολισμό, ενός αιγυπτιακού πολλαπλασιασμού ή μιας διαίρεσης, της εύρεσης της τετραγωνικής και της κυβικής ρίζας ενός αριθμού σύμφωνα με τους Ινδούς, καθώς και με τα μαγικά τετράγωνα των Κινέζων.

## 2. Ανάλυση του έργου

Το δίτομο αυτό έργο απαρτίζεται από τέσσερα μέρη. Κάθε μέρος περιλαμβάνει επτά κεφάλαια. Ο συγγραφέας αφιερώνει το πρώτο μέρος του πρώτου βιβλίου στην έρευνα, κατά κύριο λόγο, των Μαθηματικών των Βαβυλωνίων.

Στο πρώτο κεφάλαιο του μέρους αυτού, παρά τη φύση και το περιεχόμενο του έργου, δίνει πολλά στοιχεία που αφορούν στην κοινωνικο-πολιτικο-οικονομική ανάπτυξη των λαών που κατοίκησαν στις περιοχές της Μεσοποταμίας. Το όλο θέμα είναι άμεσα συνδεδεμένο με την εκπαίδευση, τη θρησκεία και τις δραστηριότητες στους ναούς, τις κοινωνικές τάξεις, την ιστορία και την πολιτική εξουσία. Από τις πρώτες σελίδες διακρίνει και αναπτύσσει πολύ δόκιμα το αγαθό της επικοινωνίας των λαών, μέσα από την οποία θα μπορέσει να καταδείξει παρακάτω τις διάφορες πολιτισμικές επιρροές τους. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα Βαβυλωνιακά Μαθηματικά μέσα από τις πηγές τους, ενταγμένα μέσα σε αυτό το ιστορικό, κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο. Αυτός ακριβώς είναι και ο βασικός σκοπός του έργου, ο οποίος εκπληρώνεται με μεγάλη επιτυχία.

Η παρουσίαση των Μαθηματικών που αναπτύχθηκαν στο χώρο της Μεσοποταμίας γίνεται με διεξοδικό τρόπο στο δεύτερο κεφάλαιο. Τα αναφερόμενα στηρίζονται σε επαρκή τεκμηρίωση, που προκύπτει από την ανάγνωση και την ερμηνεία τετρακοσίων περίπου πήλινων πλακών με μαθηματικό περιεχόμενο, καταγραμμένο σε σφηνοειδή γραφή. Με έμφαση ο συγγραφέας διαπιστώνει ότι όλα τα βαβυλωνιακά προβλήματα είναι προβλήματα υπολογισμών και ότι τα μαθηματικά των Βαβυλωνίων στερούνται θεωρητικού χαρακτήρα, ενώ στην πλειονότητά τους έχουν άμεση και στενή σχέση με θέματα της καθημερινής ζωής.

Στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο με το σύστημα αρίθμησης των λαών της Μεσοποταμίας, το εξηναδικό σύστημα αρίθμησης, τη γραφή των βαβυλωνιακών αριθμών, τις στοιχειώδεις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης, των αντίστροφων αριθμών και των κλασμάτων, ο συγγραφέας με έναν εντυπωσιακό τρόπο παρουσίασης, κυριολεκτικά

"εξαναγκάζει" και τον πιο αδιάφορο αναγνώστη να πάρει μολύβι και χαρτί και να μπει στην μαγευτική περιπλάνηση της νέας γι' αυτόν γραφής των αριθμών και των "καινούριων" πράξεων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται προβλήματα αριθμητικής και άλγεβρας που αφορούν τον υπολογισμό του μήκους καλαμιού, προβλήματα υπολογισμού βάρους, παραγωγής σιταριού, κατασκευής καναλιών, προβλήματα που αναφέρονται στις διαστάσεις και το εμβαδόν ορθογωνίου, προβλήματα αντίστροφων αριθμών, μήκους και πλάτους, προβλήματα που αναφέρονται στην πλευρά και το εμβαδόν τετραγώνου, εξισώσεις δευτέρου βαθμού, συστήματα δευτέρου βαθμού, εξισώσεις ανωτέρου βαθμού, καθώς και πρόοδοι και αθροίσματα.

Ο συγγραφέας, αφού παρουσιάζει τα διάφορα προβλήματα με τις λύσεις τους και τις απόψεις κορυφαίων ερευνητών, όπως είναι ο Neugebauer και ο Van der Waerden, κάνει απόλυτα σαφές το θέμα στον αναγνώστη, ασκεί κριτική στις προηγούμενες θέσεις και παρουσιάζει με μια ακλόνητη, συνεχή, διεισδυτική και ερευνητική προσπάθεια τις δικές του σκέψεις και απόψεις, ανοίγοντας κατ' αυτόν τον τρόπο καινούριους προβληματισμούς για νέες επιστημονικές αναζητήσεις. Στα σημεία αυτά φαίνεται ξεκάθαρα η ανεκτίμητη προσφορά και η ανήσυχη και δημιουργική σκέψη του ερευνητή, το ρίσκο, αλλά και το μεγαλείο της επιστημονικής σκέψης.

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζει τις γεωμετρικές γνώσεις των Βαβυλωνίων, που είχαν καθαρά πρακτικό χαρακτήρα, και κάνει αναφορά στον όγκο κόλουρης πυραμίδας και κόλουρου κώνου, στην τετραγωνική ρίζα αριθμών, στην έννοια της κλίσης και στο πυθαγόρειο θεώρημα, σε δύο ειδικά γεωμετρικά προβλήματα και σε πολλά άλλα προβλήματα γεωμετρικού περιεχομένου.

Στο έβδομο κεφάλαιο ασχολείται με τις πυθαγόρειες τριάδες και με την πολυσυζητημένη πλάκα "Plimpton 322". Κάνει εκτενή περιγραφή της πλάκας, παραθέτει πολλές ερμηνείες και ενδιαφέρουσες απόψεις πολλών ερευνητών, για να αναφέρει στη συνέχεια τις δικές του κρίσεις αναλύοντας διεξοδικά το περιεχόμενο της πλάκας. Τελειώνει με τον τρόπο και την σκοπιμότητα της κατασκευής της. Το πρώτο μέρος του πρώτου βιβλίου κλείνει με μια ανακεφαλαίωση των σημαντικότερων σημείων και με έναν πίνακα των κυριότερων ιστορικών γεγονότων των λαών της Μεσοποταμίας.

Ο συγγραφέας σε ό,τι αφορά τα Μαθηματικά Βαβυλωνίων, παραθέτει όλα τα απαιτούμενα στοιχεία, ώστε να αποκομίσει ο αναγνώστης μια πληρέστερη εικόνα σχετικά με αυτά. Συγκεκριμένα:

- Παρουσιάζει φωτογραφίες από πήλινες πλάκες, που περιέχουν ένα μεγάλο αριθμό χαρακτηριστικών προβλημάτων όλων των κατηγοριών.
- Καταγράφει τις μεταφράσεις των προβλημάτων αυτών, όπως τις έχουν αποδώσει και δημοσιεύσει διάφοροι ειδικοί, γνώστες των μεσοποταμιακών αρχαίων γλωσσών.
- Παραθέτει τις ερμηνείες και αναλύσεις των προβλημάτων που δίνουν διάφοροι ερευνητές, οι οποίες διαφέρουν μεταξύ τους και πολλές φορές μπορεί να είναι και αντιφατικές.

- Χωρίζει τα προβλήματα σε κατηγορίες, όπως π.χ. προβλήματα στοιχειωδών πράξεων, προβλήματα Άλγεβρας, προβλήματα Γεωμετρίας κλπ.
- Καταγράφει τις λύσεις προβλημάτων, όπως αυτές υπάρχουν στα βαβυλωνιακά κείμενα, τις ποικίλες ερμηνείες τους και τα σχόλια διάφορων ερευνητών πάνω στα προβλήματα αυτά.
- Δίνει τη δική του ερμηνεία για τη φύση των προβλημάτων και τον τρόπο λύσης τους και κάνει τις δικές του παρατηρήσεις, σχολιάζοντας το επίπεδο των προβλημάτων, τις διαδικασίες λύσεις, τις διάφορες ερμηνείες τους κλπ.

Το δεύτερο μέρος του πρώτου βιβλίου αναφέρεται στα Μαθηματικά των Αρχαίων Αιγυπτίων και περιλαμβάνει επτά κεφάλαια ( $8^{\circ} - 14^{\circ}$ ).

Η μελέτη του όγδοου και ένατου κεφαλαίου του πρώτου βιβλίου προσφέρει μεγάλη ευχαρίστηση στον αναγνώστη, γιατί με μια μοναδική αφηγηματική επιδεξιότητα παρουσιάζει στον μελετητή τα βασικότερα σημεία από την ιστορική εξέλιξη της αρχαίας Αιγύπτου και τα κυριότερα θέματα από την ζωή και τον πολιτισμό των αρχαίων Αιγυπτίων. Δίνει έμφαση στα γεωγραφικά στάδια διαμόρφωσης της χώρας και παρουσιάζει τις μεγάλες στιγμές που σημάδεψαν καθοριστικά την ιστορική εξέλιξη της Αιγύπτου. Τα μεγάλα κοινωνικά επιτεύγματα τοποθετούνται σωστά στο ιστορικό τους πλαίσιο και δίνεται έμφαση στην ανθρώπινη όψη κάθε επιτεύγματος. Το κείμενο διανθίζεται με πλούσιο φωτογραφικό υλικό, που κάνει ακόμη πιο ανάγλυφη την εικόνα του μεγάλου αυτού πολιτισμού στα μάτια του αναγνώστη. Είναι ευφυής η στάση αυτή του συγγραφέα, γιατί προφανώς δεν βλέπει μόνο την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών, κάτι που θα ήταν μονοδιάστατο και μονολιθικό, αλλά την εντάσσει σε ένα γενικότερο κοινωνικο-πολιτικο-οικονομικό σύστημα, έτσι ώστε να αποδώσει με όσο το δυνατό μεγαλύτερη ακρίβεια την αξία τους.

Στο δέκατο κεφάλαιο αναφέρεται στα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων. Απαριθμεί πολλές πηγές από τις οποίες μπορεί κανείς να αντλήσει αδιάσειστα τεκμήρια για τον υψηλό πολιτισμό των αρχαίων Αιγυπτίων, αλλά και για το επίπεδο των τεχνικών και μαθηματικών γνώσεών τους. Χρήσιμα εργαλεία για την ανακάλυψη των γνώσεων αυτών, σύμφωνα πάντα με τον ερευνητή, ήταν η ανάγνωση της αιγυπτιακής γραφής και η μελέτη των πηγών της ιστορίας της αρχαίας Αιγύπτου. Για όλα αυτά κάνει ουσιώδη αναφορά. Τις πηγές του, σε ό,τι αφορά τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων, αντλεί από ένα μεγάλο αριθμόν παπύρων, οι κυριότεροι από τους οποίους είναι ο πάπυρος του Rhind, ο πάπυρος της Μόσχας, ο πάπυρος του Kahun, ο πάπυρος του Βερολίνου, ο Μαθηματικός Δερμάτινος Κύλινδρος, ο πάπυρος Reisner και άλλοι ακόμη πάπυροι.

Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στο σύστημα αρίθμησης των αρχαίων Αιγυπτίων, στις μονάδες μέτρησης, στην πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων, στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση των ακεραίων, στα κλάσματα, στην πρόσθεση και στην αφαίρεση κλασματικών μονάδων, καθώς και στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση κλασματικών μονάδων. Για να γίνει το θέμα περισσότερο κατανοητό,

ο συγγραφέας παρουσιάζει γενικά παραδείγματα των στοιχειωδών πράξεων από διάφορους πάπυρους, κυρίως όμως από τον πάπυρο του Rhind.

Στο δωδέκατο κεφάλαιο παρουσιάζει τον υπολογισμό του  $\frac{2}{V}$  και του πίνακα 2.V. Αφού αναφερθεί στις απόψεις κορυφαίων επιστημόνων που κατά καιρούς ασχολήθηκαν με τους υπολογισμούς του  $\frac{2}{V}$  και του πίνακα 2.V, κάνει κριτική και εκθέτει τις δικές του απόψεις και τους δικούς του προβληματισμούς, περιγράφοντας τις πιο δύσκολες τεχνικοεπιστημονικές πλευρές του θέματος.

Η Αριθμητική και η Άλγεβρα των αρχαίων Αιγυπτίων παρουσιάζεται στο δέκατο τρίτο κεφάλαιο. Παραθέτονται προβλήματα με στοιχειώδεις πράξεις, προβλήματα εξισώσεων, προβλήματα χωρητικότητας, αναλογίες ή ανάλογα ποσά και αριθμητικές και γεωμετρικές πρόοδοι. Ο συγγραφέας δεν περιορίζεται μόνο σε μια ιστορική αναδρομή και παρουσίαση, αλλά εμβαθύνει περισσότερο, διατυπώνοντας την εκτίμησή του ότι *"οι αρχαίοι Αιγύπτιοι είχαν συγκεκριμένες διαδικασίες και κανόνες για την εκτέλεση των διάφορων πράξεων, τόσο των ακέραιων αριθμών όσο και των κλασματικών μονάδων"*.

Με το δέκατο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στη γεωμετρία των αρχαίων Αιγυπτίων και ειδικότερα στα εμβαδά επιφανειών γεωμετρικών σχημάτων, στους όγκους στερεών και στην κλίση πυραμίδας.

Το δεύτερο μέρος του πρώτου βιβλίου κλείνει με μια ανακεφαλαίωση των κυριότερων γνώσεων από την Αριθμητική, την Άλγεβρα και τη Γεωμετρία, με τις κρίσεις του συγγραφέα για τις διάφορες αμφισβητούμενες απόψεις, και με έναν πίνακα των σημαντικότερων ιστορικών γεγονότων της αρχαίας Αιγύπτου.

Όπως στο πρώτο μέρος, έτσι και στο δεύτερο μέρος αυτού του βιβλίου ο Θ. Εξαρχάκος επιχειρεί μια αναλυτική παρουσίαση όλων των στοιχείων σε ό,τι αφορά τα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων. Έτσι:

- Καταγράφει όλα ανεξαιρέτως τα μαθηματικά προβλήματα τα οποία υπάρχουν σε όλους τους γνωστούς πάπυρους που έχουν μέχρι σήμερα αποκρυπτογραφηθεί και δημοσιευθεί.
- Παραθέτει τις λύσεις αυτών των προβλημάτων όπως δίνονται στο αιγυπτιακό κείμενο και καταγράφει σχόλια που έχουν γίνει από προηγούμενους ερευνητές πάνω στα προβλήματα και τις λύσεις τους.
- Κάνει, τέλος, τα δικά του σχόλια.

\*\*\*

Το πρώτο μέρος του δεύτερου βιβλίου ασχολείται με τα Μαθηματικά των Ινδών και αποτελείται από επτά κεφάλαια.

Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια ιστορική αφήγηση για την αρχαία Ινδία, τη χώρα και τους κατοίκους της. Μέσα από τις περιγραφές φαίνεται καθαρά ότι από την αρχαιότητα δεν υπάρχουν αμιγείς πολιτισμοί, αλλά καθένας μπορεί να είναι δημιούργημα ή επιρροή πολλών άλλων. Μέσα από τις ιδιαιτερότητες και τις διαφορές προκύπτουν οι συγκρούσεις αλλά και οι δημιουργικές συνυπάρξεις. Η

πολιτιστική επέλαση δεν είναι αναγκαίο πάντα να ισοπεδώσει ένα λαό, αλλά μπορεί οι διαπολιτισμικές σχέσεις που θα προκύψουν και οι νέες συνθέσεις να εξασφαλίσουν τη ζωτικότητα και τη συνέχεια της ιστορίας του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο ο συγγραφέας σκιαγραφεί τη ζωή και τον πολιτισμό των αρχαίων Ινδών. Μέσα από την αφήγησή του αναδύεται ο τρόπος οργάνωσης της κοινωνίας εκείνων των εποχών. Ιδιαίτερη μνεία υπάρχει για την οικονομική ζωή, την κοινωνική δομή, τη θρησκεία και τη φιλοσοφία, τη γλώσσα και τη γραφή, την αρχαία ινδική λογοτεχνία, την εκπαίδευση και την τέχνη.

Τα Μαθηματικά των Ινδών μέχρι τον 5<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ. είναι το αντικείμενο μελέτης στο τρίτο κεφάλαιο. Σύμφωνα με τον συγγραφέα, *"το χρονικό διάστημα από το 500 π.Χ. μέχρι και ολόκληρο τον 5<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα δεν είναι γνωστό κανένα ινδικό έργο με κύριο περιεχόμενο τα Μαθηματικά. Έργα καθαρά μαθηματικού περιεχομένου αρχίζουν να εμφανίζονται μετά από το 500 μ.Χ."* Με την άποψη αυτή συμφωνούν διακεκριμένοι ερευνητές, όπως οι G. Oppert και R. C. Dutt, ο D. J. Struik και ο D. E. Smith. Ο συγγραφέας παρουσιάζει αναλυτικά τα ινδικά έργα "Sulva Sutra" και "Siddhanta", καθώς και σχόλια από καταξιωμένους ερευνητές για την επίδραση που δέχτηκαν τα έργα αυτά από τα ελληνικά Μαθηματικά, παραθέτοντας και τα δικά του ακράδαντα και πλατιά αποδεικτικά στοιχεία και ερείσματα γι' αυτές τις απόψεις.

Το τέταρτο κεφάλαιο αναλώνεται στην παρουσίαση των Μαθηματικών των Ινδών κατά τον 6<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα, τον Agyabhata και το περίφημο έργο του "Aryabhatiya". Κάνει αναλυτική και εμπεριστατωμένη παρουσίαση του έργου αυτού και αναφέρεται αναλυτικά στο πλούσιο μαθηματικό του περιεχόμενο.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζει τους Ινδούς μαθηματικούς και αστρονόμους μετά τον 6<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα, με κυριότερες αναφορές στον Brahmagurpa και το έργο του, στον Bhaskara II και το έργο του και στο χειρόγραφο "Bakhshali".

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζει ένα αξιόλογο υλικό από τα Μαθηματικά των Ινδών μετά τον 6<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα, ταξινομημένο σε τέσσερις μεγάλες ενότητες: Τον Αριθμητικό λογισμό, την Άλγεβρα, τις Διοφαντικές εξισώσεις και τη Γεωμετρία. Το παραπάνω υλικό περιέχεται στα έργα "Siddhanta-Siromani", "Lilavati", "Vija Ganita", "Brahma-Sphuta-Siddhanta" και Algebra with Arithmetic and Mensuration"

Στο έβδομο και τελευταίο κεφάλαιο για τα ινδικά Μαθηματικά ο συγγραφέας παρουσιάζει τα συστήματα αρίθμησης των Ινδών. Το ενδιαφέρον των Ινδών για τους αριθμούς αρχίζει μετά την επικράτηση του Βουδισμού στην Ινδική Χερσόνησο και κατά κύριο λόγο τους τελευταίους προχριστιανικούς αιώνες. Κατά χρονολογική σειρά τα συστήματα αρίθμησης που χρησιμοποιούσαν οι Ινδοί είναι: Το σύστημα αρίθμησης της γραφής Kharosthi, το σύστημα αρίθμησης της γραφής Brahmi, το αλφαβητικό σύστημα του Agyabhata, ο συμβολισμός των αριθμών με λέξεις και το σημερινό αριθμητικό σύστημα θέσης.

Τέλος, ακολουθεί πίνακας με τα ιστορικά γεγονότα της αρχαίας Ινδίας.

Σε ό,τι αφορά την ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών των Ινδών ο συγγραφέας τη χωρίζει σε τρεις περιόδους:

- Στην πρώτη περίοδο αναφέρεται στην ανάπτυξη των Μαθηματικών στην Ινδία μέχρι τον 5<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα. Εδώ παρουσιάζεται και η ανάπτυξη των ινδικών Μαθηματικών κατά την προχριστιανική περίοδο, καθώς και τα Μαθηματικά που υπάρχουν σε ινδικά έργα τα οποία δεν έχουν καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο, όπως είναι το Sulva Sutra και το Siddhanta.
- Στη δεύτερη περίοδο περιλαμβάνει τα Μαθηματικά των Ινδών κατά τον 6<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα. Εδώ παρουσιάζονται τα έργα του Ινδού μαθηματικού και αστρονόμου Aryabhata και κυρίως το έργο του "Aryabhataiya", που είναι το μόνο αξιόλογο έργο μαθηματικού περιεχομένου μέσα σ' αυτό τον αιώνα.
- Η τρίτη περίοδος αναφέρεται στα Μαθηματικά των Ινδών, όπως αυτά αναπτύχθηκαν μετά από τον 6<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα. Παρουσιάζεται η ζωή και το έργο των μεγαλύτερων Ινδών μαθηματικών αυτής της περιόδου και αναλύεται το περιεχόμενο των πιο χαρακτηριστικών έργων μαθηματικού περιεχομένου που γράφτηκαν αυτή την εποχή.

Το δεύτερο μέρος του δεύτερου τόμου ασχολείται με τα Μαθηματικά των Κινέζων και αποτελείται από επτά κεφάλαια (8<sup>ο</sup> - 14<sup>ο</sup>).

Το όγδοο και ένατο κεφάλαιο παρουσιάζουν κατά τρόπο ανάλογο με τα προηγούμενα την αρχαία Κίνα: Τη χώρα, τους κατοίκους, την ιστορία της και τον πολιτισμό της. Μέσα από ένα πλούσιο φωτογραφικό υλικό και μια ζωντανή αφηγηματική διάθεση ο συγγραφέας στέκεται και παρουσιάζει τις κυριότερες στιγμές της ιστορικής εξέλιξης της χώρας αυτής από τα πανάρχαια χρόνια μέχρι και τον εικοστό αιώνα. Στη διάρκεια του ιστορικού οδοιπορικού στο κοινωνικό, θρησκευτικό και φιλοσοφικό πεδίο, ο συγγραφέας αναδεικνύει πολλές και μεγάλες προσωπικότητες που έπαιξαν βαθύτερο και καταλυτικό ρόλο στις κοινωνικές, θρησκευτικές και μεταφυσικές ανησυχίες των κατοίκων της περιοχής. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προξενεί στον αναγνώστη το αφιέρωμα του συγγραφέα στην κινέζικη τέχνη, με τα σπουδαία επιτεύγματα στην Αρχιτεκτονική, τη Ζωγραφική, τη Γλυπτική, την Κεραμική και τη Μεταλλουργία.

Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αρχαιότερα κινέζικα κείμενα που περιέχουν κάποια μαθηματικά στοιχεία. Σύμφωνα με τον συγγραφέα, δεν υπάρχουν πρωτογενείς ή άλλες πηγές που να δίνουν ακριβείς πληροφορίες για το είδος των Μαθηματικών τα οποία είχαν αναπτυχθεί στην αρχαία Κίνα και για το επίπεδο στο οποίο είχαν φθάσει. Η έλλειψη των πρωτογενών πηγών μπορεί να αποδοθεί στο υλικό της γραφής και στην καταστροφή όλων των αρχαίων κινέζικων βιβλίων το 213 π.Χ. Στη συνέχεια γίνεται εκτενής ανάλυση σε δύο από τα αρχαιότερα έργα της Κίνας, το I-Ching και το Chou-Pei.

Το ενδέκατο κεφάλαιο ο συγγραφέας το αφιερώνει στα Μαθηματικά των Κινέζων μέχρι και τον 4<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα. Αναφέρεται διεξοδικά στα τρία αρχαιότερα κινέζικα έργα με καθαρά μαθηματικό περιεχόμενο: Το "Chiu-Chang Suan-Shu" (Η Αριθμητική σε εννιά μέρη), το "Hai-Tao Suan-Ching" (Η κλασική Αριθμητική της Θαλασσονήσου), και το "Sun-Tsu Suan-Ching" (Η κλασική Αριθμητική του Sun-Tsu).

Κατά τον 5<sup>ο</sup>, 6<sup>ο</sup> και 7<sup>ο</sup> αιώνα παρουσιάζονται αξιόλογοι Κινέζοι μαθηματικοί κι έτσι τα Μαθηματικά στην Κίνα παίρνουν μια άλλη μορφή ανάπτυξης. Στις



παραγράφους του δωδέκατου κεφαλαίου ο συγγραφέας παρουσιάζει τους μαθηματικούς αυτής της περιόδου και τα έργα τους, επισημαίνοντας τα πιο σημαντικά και αντιπροσωπευτικά στοιχεία τους. Συγκεκριμένα, αναφέρεται στο έργο "Wu-Tsao Suan-Ching", στην "Κλασική Αριθμητική του Hsia-Hu Yang", στην "Κλασική Αριθμητική του Chang Ch'iu-Chien", στον Wang Hs'iao-T' ung και το έργο του "Η κλασική Αριθμητική των αρχαίων κανόνων", καθώς και στον Chen Luan.

Στο δέκατο τρίτο κεφάλαιο ο συγγραφέας αναφέρεται στα Μαθηματικά των Κινέζων μετά τον 7<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα. Τα μαθηματικά έργα που γράφτηκαν στην Κίνα κατά τη διάρκεια του 8<sup>ου</sup>, 9<sup>ου</sup>, 10<sup>ου</sup> και του 11<sup>ου</sup> αιώνα είναι ελάχιστα. Αντίθετα, κατά το 12<sup>ο</sup>, 13<sup>ο</sup> και 14<sup>ο</sup> αιώνα παρουσιάστηκαν αξιόλογοι μαθηματικοί με σημαντικό έργο. Τους μαθηματικούς αυτής της περιόδου και το έργο τους παρουσιάζει ο συγγραφέας στο κεφάλαιο αυτό. Οι σπουδαιότεροι είναι: ο Li Yeh, ο Ch'in Chiu-Shao και το έργο του "Μαθηματικές μελέτες σε εννιά μέρη", (ο συγγραφέας παρουσιάζει πολλά προβλήματα που αναφέρονται στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία), ο Yang Hui και ο Chu Shih-Chieh και το έργο του "Πολύτιμο κάτοπτρο των τεσσάρων στοιχείων".

Στο δέκατο τέταρτο κεφάλαιο ο συγγραφέας αναφέρεται στον τετραγωνισμό του κύκλου στα κινέζικα Μαθηματικά παρουσιάζοντας τις προσπάθειες των Liu Hui, και Tsu Ch'ung-Chih για να σχολιάσει στην τελευταία ενότητα τις ξένες επιδράσεις που είχαν δεχτεί οι Κινέζοι μαθηματικοί πάνω σε αυτό το θέμα. Ακολουθεί, τέλος, πίνακας των σπουδαιότερων ιστορικών γεγονότων της Κίνας.

Την ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών των Κινέζων ο συγγραφέας την χωρίζει σε τρεις περιόδους:

- Η πρώτη περίοδος περιλαμβάνει: Την ανάπτυξη των Μαθηματικών στην αρχαία Κίνα κατά την προχριστιανική περίοδο και κατά τους τέσσερις πρώτους μεταχριστιανικούς αιώνες. Εδώ παρουσιάζονται και τα Μαθηματικά που περιέχονται σε κινέζικα έργα μη μαθηματικού περιεχομένου, όπως είναι το I-Ching και το Chu-Pei. Στην περίοδο αυτή ανήκει και το σημαντικότερο έργο στην ιστορία των κινέζικων Μαθηματικών, το Chiu-Chang Suan-Shu (Η Αριθμητική σε εννιά μέρη), που γράφτηκε γύρω στο 2<sup>ο</sup> ή 3<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα και αποτέλεσε τη βάση και την πηγή αναφοράς όλων σχεδόν των μεταγενέστερων μαθηματικών έργων στην ιστορία της Κίνας.
- Η δεύτερη περίοδος αναφέρεται στα Μαθηματικά που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια του 5<sup>ου</sup>, του 6<sup>ου</sup> και του 7<sup>ου</sup> αιώνα μ.Χ.
- Η τρίτη περίοδος περιλαμβάνει τα Μαθηματικά των Κινέζων, όπως αυτά αναπτύχθηκαν μετά τον 7<sup>ο</sup> μ.Χ. αιώνα και μέχρι το 14<sup>ο</sup> αιώνα. Εδώ παρουσιάζεται η ζωή και το έργο των μεγαλύτερων Κινέζων μαθηματικών αυτής της περιόδου και αναλύεται το περιεχόμενο των σημαντικότερων κινεζικών μαθηματικών έργων αυτής της εποχής.

\*  
\* \*

Οι ικανότητες του συγγραφέα ως μαθηματικού και συγχρόνως ικανού ιστορικού ερευνητή, του επέτρεψαν να δημιουργήσει ένα έργο χωρίς αμφιβολία από τα καλύτερα του είδους του. Είναι μια αξιόλογη εργασία με πολλές και ενδιαφέρουσες λεπτομέρειες, που δύσκολα τις βρίσκει κανείς σε άλλα πολύ πιο ογκώδη έργα. Για πάρα πολλούς λοιπόν λόγους, φοιτητές, ερευνητές, ιστορικοί, μαθηματικοί, ειδικοί - καθένας που ενδιαφέρεται για τα Μαθηματικά, την Ιστορία και την εξέλιξη του πολιτισμού - θα καθηλωθεί από αυτό το δίτομο έργο, το πλούσιο σε χιλιάδες ερεθίσματα.

Μέσα από τις σελίδες του ο αναγνώστης θα διαπιστώσει δίκαια ότι τα Μαθηματικά δεν είναι μια σειρά από στεγνές τεχνικές διαδικασίες, αλλά μια αστείρευτη πηγή που μορφοποιεί και καθορίζει αποφασιστικά τη ζωή και τη σκέψη των λαών. Με τις γνώσεις που μας παρέχει για τη φύση και τη φιλοσοφία των Μαθηματικών αυτών των λαών αιτιολογείται και το γιατί εξελίχθηκαν με τον τρόπο αυτό.

Αυτό το ενδιαφέρον και πρωτοποριακό έργο γίνεται προσιτό και ωφέλιμο όχι μόνο σε όσους ασχολούνται με τα Μαθηματικά, αλλά και σε κάθε σύγχρονο άνθρωπο, γιατί σ' αυτό ο καθηγητής Θ. Εξαρχάκος περιγράφει την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών σε αλληλεξάρτηση με την εξέλιξη της ανθρώπινης κοινωνίας. Αποδεικνύει ότι η εξέλιξη και η ανάπτυξη των Μαθηματικών οφείλεται στην ανάγκη εξεύρεσης λύσεων σε προβλήματα που δημιούργησε το πλάτεμα των κοινωνικών σχέσεων και η ανάπτυξη του πολιτισμού.

Η βιβλιογραφία της Ιστορίας των Μαθηματικών των αρχαίων λαών της Ανατολής εμπλουτίστηκε με ένα θεμελιώδες, από κάθε άποψη, έργο αναφοράς. Η προσπάθεια αυτή είναι απόλυτα επιτυχημένη. Η διεθνής έρευνα στην ιστορία των Μαθηματικών των λαών της Ανατολής πρέπει να θεωρείται εξαιρετικά ευτυχής για την απόκτηση αυτού του αξιόπιστου, καινούριου και βασικού έργου.

## Βιβλιογραφία

1. Beruni, Al. (1910). *India*. Δύο τόμοι. Μετάφραση στα Αγγλικά από τον E. C. Sachou, Λονδίνο.
2. Boyer, C. B. (1989). *A History of Mathematics*. John Wiley and sons, New York.
3. Boyer, C. B. (1944). *Fundamental Steps in the Development of Numeration*. Isis, 35.
4. Cajori, F. (1928 & 1929). *A History of Mathematics Notations*. 2 vols, Open Court, Chicago.
5. Cajori, F. (1919). *A History of Mathematics*. 2<sup>nd</sup> edition, Macmillan, New York, reprinted 1924.
6. Eves, H. (1976). *An Introduction to the History of Mathematics*. 4<sup>th</sup> edition, New York.

7. Εξαρχάκος, Θ. Γ. (1993). *Εισαγωγή στα Μαθηματικά*. Τόμος Β' Ανάλυση, Αθήνα.
8. Εξαρχάκος, Θ. Γ. (1997). *Ιστορία των Μαθηματικών*. Τόμος Α' τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων και των Αρχαίων Αιγυπτίων, Αθήνα.
9. Gow, J. (1884). *A Short History of Greek Mathematics*. Cambridge.
10. Kaye, G. R. (1915). *Indian Mathematics II*. Calcutta.
11. Kaye, G. R. (1914). *Indian Mathematics*. Isis, vol.2 pp. 326-356.
12. Loria, G. (1971). *Ιστορία των Μαθηματικών*. Τόμος 1<sup>ος</sup>, Εκδόσεις Ε.Μ.Ε., Αθήνα.
13. Neugebauer, O. (1945). *The History of Ancient Astronomy; Problems and Methods*. Journal of Near Eastern studies, 4.
14. Neugebauer, O. (1948). *The Astronomical origin of the Theory of conic sections*. Proceeding of the American Philosophical Society, 92.
15. Neugebauer, O. (1952). *The Exact Sciences in Antiquity*. Princeton University Press, Princeton, N. J.
16. Newman, J. R. (1988). *The world of Mathematics*. 4 vols, Tempus Books of Microsoff Press.
17. Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics*. Dover Publication, Inc. New York.
18. Smith, D. E. (1911). *The History and Transcendence of  $\pi$* . J. W. A. Young, Longmans Green, New York.
19. Smith, D. E. and Kalpinski, L. C. (1911). *The Hindu-Arabic Numerals*. Ginn. Boston.
20. Struik, D. J. (1963). *On Ancient Chinese Mathematics*. The Mathematical Teachers, 56.
21. Tannery, Paul. (1893). *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*. Paris.
22. Tannery, Paul. (1962). *Sur la Mesure du Cercle d'Archimedes*. Memoires Scientifiques I.
23. Van der Waerden, B. L. *Science Awakening*. English translation by Arnold Dresden. P. Noordhoff Ltd, Groningen, Holland,.
24. Van der Waerden, B. L. (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, Tokyo.